Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université TAHRI Mohamed, Béchar

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

Polycopié Pédagogique de Cours

Intitulé :

Transfert de chaleur : cours et travaux dirigés

Code de la Matière : F122 : Licence Génie des procédés
F512 : Licence Energétique
F121 : Master énergétique
Niveau : Licence & master

Filières : Génie des procédés – Génie mécanique
Spécialités : Génie des procédés – Energétique – Construction

Etabli par l'enseignant : Dr. MEBARKI Brahim

Année Universitaire : 2021 - 2022

Table des matières i
Avant-propos iv

Chapitre 1 : Conduction unidimensionnelle en régime permanent

1.1. Introduction 1
1.2. Mécanisme de la conduction 1
1.3. Définitions générales 2
1.3.1. Champs de température - Régime permanent - Régime transitoire 2
1.3.2. Surface isotherme 2
1.3.3. Gradient de température 2
1.3.4. Notions de flux et densité de flux thermique 3
1.3.5. Loi de Fourier 3
1.4. Equation générale de la conduction 5
1.4.1. Equation de la chaleur pour un solide homogène et isotrope 7
1.4.2. Différentes formes de l'équation de la chaleur 7
1.4.3. Expressions mathématiques de l'équation de la chaleur 7
1.4.4. Conditions initiales et aux limites 8
1.4.4.1. Conditions initiales 8
1.4.4.2. Conditions aux limites 8
1.5. Conduction en régime permanent sans génération interne 9
1.5.1. Murs plans 9
1.5.1.1. Mur simple à surfaces isothermes 10
1.5.1.2. Mur simple avec convection aux surfaces 11
1.5.1.3. Mur simple avec conductivité thermique variable 12
1.5.1.4. Mur composite : association en série 14
1.5.1.5. Mur composite : association en parallèle 15
1.5.2. Cylindre creux à surfaces latérales isothermes 16
1.5.2.1. Cylindre multicouche avec convection aux surfaces 18
1.5.3. Sphère creuse à surfaces isothermes 18
1.5.4. Synthèse des résultats obtenus 20
1.6. Conduction en régime permanent avec génération interne 20
1.6.1. Mur plan avec source interne 20
1.6.2. Mur plan avec source interne dépendant de la position 22
1.6.3. Tubes cylindriques avec source interne 23
1.6.3.1. Cylindre plein 23
1.6.3.2. Cylindre creux : Température imposée aux surfaces 24
1.6.3.3. Cylindre creux : Surface interne adiabatique 24
1.6.3.4. Cylindre creux : Surface externe adiabatique 25
1.7. Exercices sur le chapitre 25

Chapitre 2 : Conduction à travers les surfaces auxiliaires - Les ailettes

2.1. Introduction 43
2.2. Définition & intérêt des ailettes 43
2.2.1. Différents types d'ailettes 44
2.3. Modèle physique et équation générale 44
2.3.1. Hypothèses simplificatrices 45
2.3.2. Mise en équations 45
2.3.3. Ailette à section uniforme 46
2.3.3.1. Ailette infinie 47
2.3.3.2. Ailette dont l'extrémité est adiabatique 48

2.3.3.3. Ailette dont l'extrémité est soumise à un flux convectif 48
2.3.3.4. Ailette dont la température à l'extrémité est connue 49
2.4. Performances thermiques des ailettes 49
2.4.1. Efficacité d'une ailette (effectiveness en anglais) 49
2.4.2. Rendement d'une ailette (efficiency en anglais) 50
2.4.3. Efficacité & Rendement des surfaces ailettes 51
2.5. Concept de la longueur d'ailette corrigée 52
2.6. Exercices sur le chapitre 53

Chapitre 3 : Conduction unidimensionnelle en régime variable

3.1. Introduction 61
3.2. Systèmes thermiques minces (systèmes à température uniforme) 61
3.2.1. Validité de l'approximation des systèmes thermiques minces 63
3.3. Systèmes thermiques épais 65
3.3.1. Méthodes analytiques 65
3.3.1.1. Technique utilisant la transformée de Laplace 65
3.3.1.2. Méthode de séparation des variables 70
3.3.2. Méthodes numériques (méthode des différences finies) 72
3.3.2.1. Schéma explicite 74
3.3.2.2. Schéma implicite 76
3.3.2.3. Schéma généralisé 77
3.4. Exercices sur le chapitre 77

Chapitre 4 : Transfert de chaleur par convection

4.1. Introduction 82
4.2. Equation de conservation 82
4.2.1. Equation de conservation de la masse ou équation de continuité 82
4.2.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement 82
4.2.3. Equation de conservation de l'énergie 83
4.3. Ecoulement laminaire et écoulement turbulent 83
4.4. Concept de la couche limite 84
4.5. Méthode d'évaluation du coefficient d'échange par convection 85
4.5.1. Théorème de Vaschy–Buckingam ou théorème Pi 86
4.6. Formules empiriques usuelles 87
4.6.1. Convection forcée 88
4.6.1.1. Ecoulement externe 88
4.6.1.2. Ecoulement interne 91
4.6.2. Convection naturelle ou libre 92
4.6.2.1. Convection naturelle externe 93
4.6.2.2. Convection naturelle interne 94
4.7. Exercices sur le chapitre 96

Chapitre 5 : Transfert de chaleur par rayonnement

5.1. Introduction 105
5.2. Démonstration du processus physique de rayonnement thermique 105
5.3. Rayonnement électromagnétique 106
5.4. Classification des grandeurs associées au rayonnement 107
5.4.1. Composition spectrale 107
5.4.2. Composition spatiale 107
5.5. Comportement d'une surface vis à vis le rayonnement 108
5.6. Corps opaques émetteurs de rayonnement 109

5.6.1. Flux d'une source 109
5.6.2. Luminance 109
5.6.2.1. Angle solide 110
5.6.3. Loi de Lambert - loi de cosinus 113
5.6.4. Emittance 113
5.7. Corps opaques récepteurs de rayonnement 114
5.7.1. Éclairement ou irradiation 114
5.7.2. Radiosité 114
5.8. Flux, intensité, émittance, et luminance spectrale 115
5.9. Corps noir : objet modèle 116
5.9.1. Lois du corps noir 116
5.9.1.1. Loi de Planck 116
5.9.1.2. Lois de Wien 118
5.9.1.3. Loi de Stefan-Boltzmann 120
5.9.1.4. Fraction de l'émittance totale contenue dans un intervalle spectral donné 121
5.10. Les corps réels 122
5.10.1. Emissivité 122
5.10.2. Absorptivité, réflectivité et transmitivité 125
5.10.3. Loi de Kirchhoff - Relation entre émissivité et absorptivité 126
5.11. Calcul des échanges radiatifs entres surfaces 127
5.11.1. Échanges radiatifs entre surfaces noires 127
5.11.1.1. Relations entre facteurs de forme 128
5.11.1.2. Estimation des facteurs de forme 131
5.11.1.3. Échange entre deux surfaces noires 136
5.11.1.4. Échange dans une enceinte fermée 136
5.11.1.5. Analogie électrique 137
5.11.2. Échange radiatif entre surfaces, grises et diffuses 138
5.11.2.1. Flux net perdu à la surface 138
5.11.2.2. Echange radiatif entre deux surfaces 139
5.11.2.3. Méthodes de résolution 140
5.11.2.4. Echange radiatif entre deux surfaces formant une enceinte 140
5.11.2.5. Echange radiatif entre plusieurs surfaces formant une enceinte 142
5.11.2.6. Ecran radiatif 143
5.12. Exercices sur le chapitre 145

Références bibliographiques 157
Annexe 158

Avant-propos

Le transfert de chaleur constitue un cours obligatoire pour tous les étudiants universitaires des filières scientifiques. La compréhension fine de ses phénomènes est incontournable pour l'étude, la conception et l'optimisation de plusieurs dispositifs, systèmes et machines. Parmi ces derniers, on peut citer les moteurs à combustion, les turbines, les échangeurs thermiques, les centrales thermiques, les systèmes de réfrigérations et même le corps humain.

Ce polycopié « ***Transfert de chaleur – cours et travaux dirigés »*** constitue une référence aussi bien aux étudiants universitaires en Licence génie des procédés qu'aux étudiants en génie mécanique Licence et Master. Lors de son élaboration, j'ai essayé de fournir les fondements théoriques nécessaires pour la bonne compréhension des mécanismes de transfert thermique et de rendre ce module accessible au plus grand nombre d'étudiants.

Le présent polycopié est subdivisé en cinq chapitres dont le premier chapitre aborde la conduction unidimensionnelle en régime permanent. Il traite essentiellement le développement de l'équation générale de la conduction en coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques avec et sans génération interne de la chaleur. Ensuite, des modèles mathématiques pour les trois géométries souvent rencontrées en pratique à savoir : les murs plans, les cylindres creux et les sphères creuses sont développés et ceux pour différentes conditions aux limites.

Les ailettes dites aussi surfaces auxiliaires sont exposées dans le deuxième chapitre. La distribution de température et le calcul du flux thermique dissipé sont développés pour différentes conditions aux limites. L'efficacité et le rendement des ailettes sont également discutés.

Le troisième chapitre est consacré à la conduction thermique unidimensionnelle en régime transitoire. Deux types de modèles sont abordés, il s'agit des systèmes thermiques minces ou systèmes à température uniforme et les systèmes épais.

Le transfert de chaleur par convection fait l'objet du quatrième chapitre. La méthode d'analyse dimensionnelle est présentée afin d'évaluer le coefficient de transfert de chaleur par convection. Des corrélations empiriques pour évaluer le coefficient de transfert de chaleur par convection libre et forcée sont établies pour diverses configurations géométries et selon la nature d'écoulement laminaire ou turbulent.

Le dernier chapitre porte sur le troisième mode de transfert de chaleur, nous y exposerons d'abord les définitions de base et les lois fondamentales du rayonnement thermique. Ces notions sont très essentielles pour traiter ensuite les problèmes d'échanges radiatifs entre surfaces.

Outre les exemples d'applications introduits dans le texte, l'étudiant trouvera à la fin de chaque chapitre, un certain nombre de problèmes exposés, traités et résolus d'une manière détaillée et exhaustive, couvrant ainsi les aspects théoriques du cours.

1.1. Introduction

Les phénomènes de transfert d'énergie, en particulier la ***transmission de chaleur***, sont omniprésents dans notre vie quotidienne et les exemples sont nombreux : les fours industriels, les moteurs thermiques, générateurs de vapeur, les installations de chauffage et de climatisation, les échangeurs, etc. Une connaissance fine de ces processus et de leurs régimes à une importance déterminante pour l'étude et le fonctionnement de ces dispositifs, aussi bien que pour des raisons économiques et environnementales.

Le transfert de chaleur s'effectue habituellement par trois mécanismes ou modes de base : La ***conduction***, la ***convection*** et le ***rayonnement***. Le premier phénomène qui fera l'objet de ce chapitre a lieu dans les solides ou les fluides au repos. La convection se rencontre spécialement dans les fluides ou plus particulièrement entre un solide et un fluide en mouvement. L'apport de chaleur par rayonnement peut avoir lieu entre deux corps de températures différentes séparés par le vide ou un milieu transparent sous forme d'ondes électromagnétiques, il est d'autant plus important que la température est élevée. En particulier, le rayonnement peut se propager dans le vide alors que la conduction et la convection nécessite un milieu pour se réaliser. Dans la plupart des phénomènes étudiés, les trois modes coexistent simultanément.

Dans ce chapitre, l'étudiant trouvera une technique analytique cohérente pour résoudre efficacement les problèmes de conduction. Notre objectif dans un premier lieu est de trouver l'équation différentielle générale qui gouverne ce phénomène. Nous allons le faire en effectuant un bilan thermique sur un volume élémentaire à travers lequel la chaleur est transférée. Cela, nous permettra ensuite d'examiner deux types de problèmes : les problèmes de conduction thermique en régime permanent sans génération interne de chaleur dans laquelle divers cas pratiques seront étudiés. La discussion est cependant limitée aux géométries dans lesquelles la température est fonction d'une seule variable spatiale. Les exemples les plus simples d'un tel système sont la paroi plane, tube cylindrique creux et la sphère creuse. En ce qui concerne le deuxième type de problème, les mêmes géométries seront discutées.

Comme nous le verrons, la technique de résolution est basée sur deux étapes :

- Détermination du champ de température en résolvant l'équation de conduction accompagnée aux conditions aux limites et,
- Trouver le taux de transfert de chaleur (flux thermique échangé).

Avant d'y procéder, il est nécessaire de rappeler le mécanisme de conduction à l'échelle microscopique et d'exposer certaines définitions pertinentes.

1.2. Mécanisme de la conduction

Le transfert de la chaleur par conduction dans un matériau solide (ou un fluide au repos) n'apparaît que si l'on génère une perturbation thermique en un point du matériau. Lorsque l'on chauffe un matériau solide, les ions les plus proches de la source de chaleur se mettent à vibrer de façon intense et communiquent ces vibrations aux ions voisins par le biais du réseau, que celui-ci soit ***cristallin*** ou ***amorphe***. Ces vibrations ont pour conséquence la production de chaleur et sa diffusion dans le matériau (voir figure 1.1). Cet état d'excitation est fonction de l'intensité de la source de chaleur. Le phénomène de propagation des ondes à l'échelle microscopique est observable sous la forme d'un phénomène de diffusion de chaleur à l'échelle macroscopique. Ce phénomène de diffusion de la chaleur est souvent appelé conduction de la chaleur.

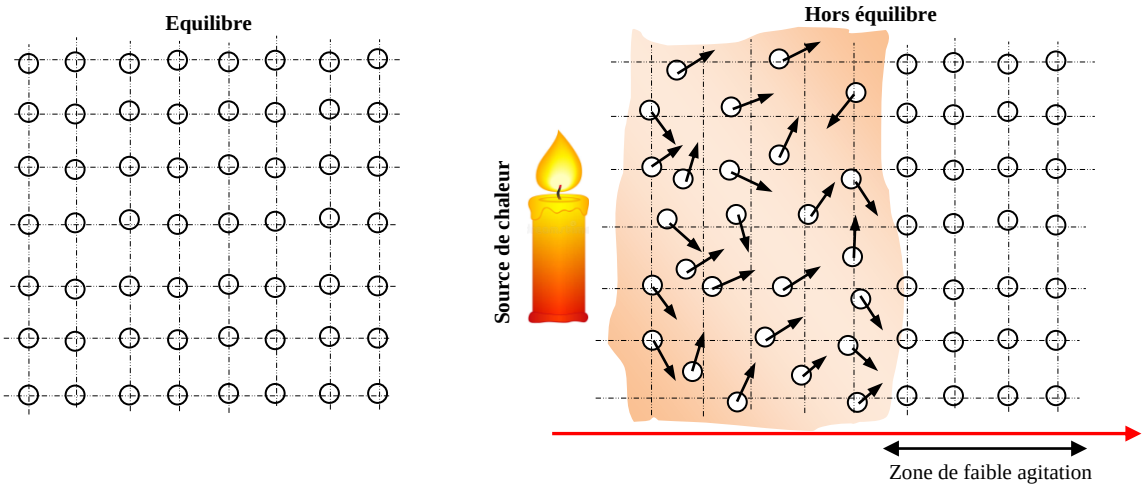


Figure 1.1 : Description schématique de la conduction thermique

1.3. Définitions générales

1.3.1. Champs de température - Régime permanent - Régime transitoire

Les observations pratiques montrent que pour chaque point d'un espace matériel, on a une seule valeur de température. La multitude des valeurs pour les tous points s'appelle champs de température. Au point de vu mathématique, le champ de température est représenté par une fonction de cordonnées spatiales et temporelles : T = *f*(x,y,z,t)

La détermination du champ de température dans un processus thermique représente l'un des objectifs principaux pour l'analyse des problèmes de transfert thermique. Nous distinguerons deux cas :

- ✓ Champ de température indépendant du temps : le régime est dit ***permanent*** ou ***stationnaire***.
- ✓ Evolution du champ de température dépendant du temps : le régime est dit ***variable***, ***transitoire*** ou ***instationnaire***

1.3.2. Surface isotherme

On appelle surface isotherme le lieu géométrique des points matériels ayant la même température

- ✓ En régime permanent, les surfaces isothermes restent fixes.
- ✓ En régime transitoire, les surfaces isothermes peuvent se déplacer et se déformer.

Les surfaces isothermes ne peuvent pas s'entrecroiser parce qu'un ne peut avoir en même temps deux température différentes.

1.3.3. Gradient de température

Le Gradient de température est un vecteur ayant grandeur qui détermine la variation de température dans la direction de la normale commune de deux courbes isothermes voisines à l'intérieur d'un corps. Son expression mathématique est donnée par l'application de l'opérateur nabla ($\vec{\nabla}$) au champ de température :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial n}\vec{n} \qquad (1.1)$$

Où : $\vec{n}$ vecteur unitaire de la normale, $\frac{\partial T}{\partial n}$ est la dérivée de la température le long de la normale

1.3.4. Notions de flux et densité de flux thermique

On appelle flux de chaleur « Φ » à travers une surface, la quantité de chaleur « Q » qui traverse cette surface par unité de temps. Le flux de chaleur est un scalaire qui représente le débit de chaleur à travers la surface.

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \qquad (1.2)$$

Il se mesure en Watt d'où l'appellation puissance thermique employée surtout dans la terminologie des appareils et équipements thermiques. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} \qquad (1.3)$$

D'une façon plus générale, pour un élément de surface « dS » orienté par sa normale unitaire $\vec{n}$, le flux élémentaire de chaleur peut s'écrire :

$$d\Phi = \vec{\varphi}.\vec{n}\,.dS = \varphi\cos\alpha\, dS \qquad (1.4)$$

$\vec{\varphi}$ caractérise en chaque point « M » du milieu la direction, le sens et l'intensité du flux thermique (voir figure 1.2). L'ensemble des « $\vec{\varphi}$ » constitue un champ de vecteurs analogue aux autres champs physiques : champs électriques, champs de forces, champs de vitesses, etc.

Remarque : Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alors $\Phi = 0$ (et $\vec{\varphi} = \vec{0}$) : Le flux circulant perpendiculairement à la surface isotherme est nul.

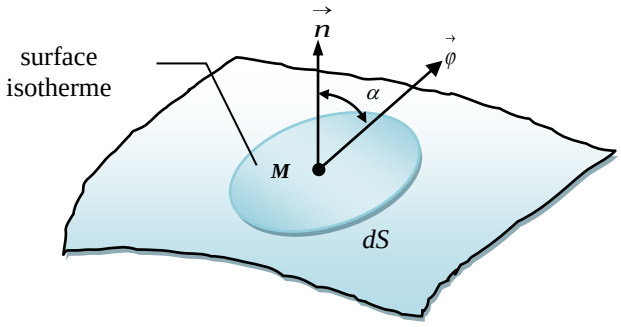


Figure 1.2 : Densité locale de flux thermique.

1.3.5. Loi de Fourier

Au début du XIX^{e}, plus précisément vers 1822 Jean-Baptiste Fourier publie la loi fondamentale de la conduction dans son traité : « La théorie analytique de la chaleur » qui depuis porte son nom. Elle s'énonce ainsi : la densité de flux est proportionnelle à la conductivité thermique du milieu et au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\text{grad}}\ T \qquad (1.5)$$

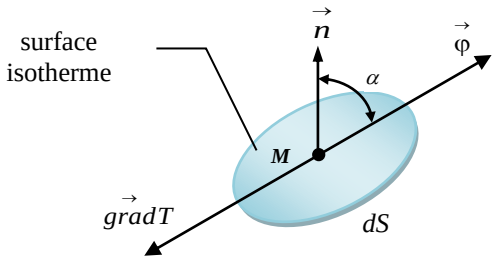


Figure 1.3 : Loi de Fourier

La conductivité thermique λ (souvent notée k dans les pays anglo-saxons) est une caractéristique intrinsèque. Elle caractérise l'habilité d'un matériau à conduire la chaleur. En règle générale, les métaux qui sont bons conducteurs de l'électricité sont bons conducteurs thermiques. Les liquides conduisent en général moins bien la chaleur que les solides, sauf lorsque ce sont des métaux liquides (mercure, Aluminium liquide, etc.). La conductivité thermique des gaz dépend de la pression mais aussi fortement de la température et de la masse molaire du gaz. Nous reportons dans le tableau 1.1 quelques valeurs de la conductivité thermique des participables catégorie de matériaux.

Matériaux	**λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)**	**Matériaux**	**λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)**
Métaux purs	7 à 420	Isolants Thermique	0.02 à 0.2
Alliages	11 à 150	Matériaux non métalliques	0.1 à 15
Pierres naturelles	2.3 à 4.0	Gaz	0.01 à 0.23
Matériaux de construction	0.2 à 3.5	Air à 0°C	0.023
Pierre réfractaire	0.7 à 3.5	Liquides	0.1 à 0.6

Tableau 1.1 : Conductivité thermique des principales catégories de matériaux.

Dans le cas général, la conductivité thermique peut être une fonction du point considéré $\lambda = \lambda\left(\vec{M}\right)$. Elle peut aussi dépendre de la température. Si le milieu est isotrope et homogène, la conductivité thermique ne dépend que de la température.

Dans de nombreuses applications pratique ou les variations de température ne sont pas trop importantes, on admet avec une précision acceptable que λ est une constante, la relation de Fourier s'écrit alors : $\vec{\varphi} = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\right)$

Dans de nombreux cas rencontrés dans la nature ou bien parmi les objets fabriqués par l'homme, la conductivité n'est plus isotrope mais orthotrope, voire anisotrope. Dans le cas orthotrope (cristal, matériaux composites, matériau fibreux, etc.), la relation (1.5) devient :

$$\vec{\varphi} = -\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\right) \qquad (1.6)$$

λ_x, λ_y, λ_z désigne les conductivités principales du milieu selon les directions Ox, Oy,Oz.

Dans le cas de matériaux anisotropes, La conductivité thermique devient alors un tenseur et la loi de Fourier généralisée s'exprime par :

$$\vec{\varphi} = -[\lambda]\vec{\text{grad}}\ T \tag{1.7}$$

Où : $[\lambda] = \begin{vmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{xy} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{xz} & \lambda_{yz} & \lambda_{zz} \end{vmatrix}$ désigne le tenseur symétrique de conductivité thermique.

Les trois composantes de la densité de flux dans ce cas sont alors :

$$\begin{cases} \varphi_x = -\left(\lambda_{xx}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy}\dfrac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz}\dfrac{\partial T}{\partial z}\right) \\ \varphi_y = -\left(\lambda_{xy}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy}\dfrac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz}\dfrac{\partial T}{\partial z}\right) \\ \varphi_z = -\left(\lambda_{xz}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yz}\dfrac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz}\dfrac{\partial T}{\partial z}\right) \end{cases} \tag{1.8}$$

1.4. Equation générale de la conduction

Un objectif majeur dans l'analyse de des problèmes de conduction est de déterminer le champ de température dans le milieu considéré, résultant des conditions imposées aux ses frontières. Une fois, cette distribution connue, le flux de chaleur en tout point du milieu ou à sa surface peut être calculé à partir de la loi de Fourier. Considérons un milieu homogène dans lequel existent des gradients de température et dont la distribution de température T(x,y,z,t) est exprimée en coordonnées cartésiennes. Nous définissons un volume élémentaire dv, comme le montre la figure 1.4.

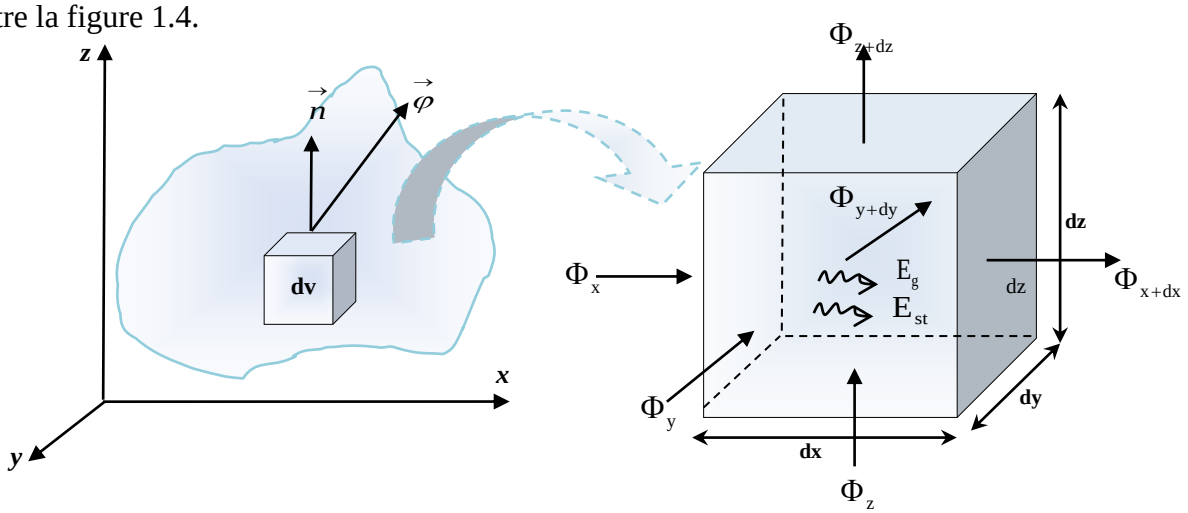


Figure 1.4 : Bilan d'énergie d'un système immobile.

Ecrivons le premier principe de la thermodynamique (principe de conservation de l'énergie) pour ce volume élémentaire dv=dxdydz, qui reçoit et transmet de la chaleur, on a :

La variation de l'énergie interne pendant dt
=
La quantité de chaleur échangée sur la surface limite S
+
La chaleur produite par les sources internes

- La variation de l'énergie interne stockée dans le volume de contrôle s'écrit : $E_{st} = mC_p \partial T / \partial t$, m désigne la masse du volume élémentaire dv, soit m=ρdv avec ρ masse volumique du matériau considéré. Le taux de variation temporelle de l'énergie interne s'écrit alors :

$$E_{st} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz \tag{1.9}$$

- Dans le milieu, il peut également y avoir un terme de source d'énergie associé au taux de génération d'énergie thermique. Ce terme est représenté par :

$$E_g = P\, dxdydz \tag{1.10}$$

Où P la source interne correspondant à la chaleur produite par le matériau de manière interne par unité de temps et par unité de volume du milieu (W/m^3).

- Le transfert de chaleur par conduction se produira à travers chacune des surfaces du volume élémentaire. Les flux par conduction reçu par l'élément sur les directions Ox, Oy et Oz sont Φ_x Φ_y et Φ_z, respectivement. Les flux sortant aux surfaces opposées peuvent alors être exprimés en utilisant le développement en série Taylor :

$$\begin{cases} \Phi_{x+dx} = \Phi_x + \dfrac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx \\ \Phi_{y+dy} = \Phi_y + \dfrac{\partial \Phi_y}{\partial y} dy \\ \Phi_{z+dz} = \Phi_z + \dfrac{\partial \Phi_z}{\partial z} dz \end{cases} \tag{1.11}$$

Dans ces conditions, la forme générale de la loi conservation d'énergie s'écrit alors :

$$\underbrace{E_{st}}_{\Delta U} = \underbrace{\left(E_{in} - E_{out}\right) + E_g}_{\delta Q} + \underbrace{0}_{\delta W} \tag{1.12}$$

Le travail est nul (solide immobile). En remplaçant chaque terme par sa valeur, nous obtenons :

$$\underbrace{\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz}_{E_{st}} = \underbrace{\left(\Phi_x + \Phi_y + \Phi_z\right)}_{E_{in}} - \underbrace{\left(\Phi_{x+dx} + \Phi_{y+dy} + \Phi_{z+dz}\right)}_{E_{out}} + \underbrace{P dxdydz}_{E_g} \tag{1.13}$$

En introduisant les expressions de l'équation (1.11), on obtient :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz = -\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} dy - \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} dz + P dxdydz \tag{1.14}$$

Les flux de chaleur par conduction peuvent être évalués à partir de la loi de Fourier, où chaque composante du flux est multipliée par la surface appropriée.

$$\Phi_x = -\lambda_x dydz \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \Phi_y = -\lambda_y dxdz \frac{\partial T}{\partial y}; \quad \Phi_z = -\lambda_z dxdy \frac{\partial T}{\partial z} \tag{1.15}$$

En remplaçant l'équation 1.15 dans l'équation 1.14 et en divisant tous les membre sur le volume élémentaire (dx dy dz), on obtient :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + P \tag{1.16}$$

L'équation 1.16 est la forme générale, en coordonnées cartésiennes, de l'équation de conduction. Cette équation est également connue sous le nom d'**équation de Fourier-Biot**, et fournit un outil de base pour l'analyse des problèmes de la conduction thermique.

1.4.1. Equation de la chaleur pour un solide homogène et isotrope

Nous nous placerons systématiquement dans le cas pratique du ***solide homogène et isotrope***. Dans ce cas les caractéristiques thermophysiques λ, ρ et C_p ne dépendent que de la température. Ainsi si d'autre part $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda = \underline{\text{Cte}}$ et la source interne « P » indépendante de la température, l'équation 1.16 prend la forme :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + P \qquad (1.17)$$

En divisant par λ et en introduisant la ***diffusivité thermique*** $a = \lambda/\rho C_p$ (en m^2/s) qui quantifie la vitesse de diffusion de la chaleur à l'intérieur du milieu. L'équation (1.17) devient :

$$\Delta T - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{P(x,y,z,t)}{\lambda} = 0 \qquad (1.18)$$

L'équation (1.18) est appelée l'équation de conduction thermique. C'est une équation différentielle partielle linéaire du second ordre admet en principe du point de vue mathématique une infinité de solution. Cette équation n'aura de sens physique que si elle est accompagnée aux conditions frontières (aux limites) et initiales liées au problème étudié. L'intégration de cette équation permet de déterminer la distribution (ou **champ de température**) de température dans le milieu en chaque instant T(x,y,z,t). Une fois cette distribution de température connue, le **flux thermique** en tout point du matériau peut être calculé à partir de la loi de Fourier .

1.4.2. Différentes formes de l'équation de la chaleur

Selon la nature des problèmes examinés, l'équation (1.18) peut avoir les formes suivantes :

a) Cas d'un milieu sans sources internes, en régime permanent : L'équation de la chaleur (1.18) se réduit alors à l'équation de Laplace :

$$\Delta T = \frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.19)$$

b) Cas d'un milieu avec sources internes, en régime permanent : L'équation de la chaleur (1.18) se réduit alors à l'équation de Poisson :

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0 \qquad (1.20)$$

c) Cas d'un milieu sans sources internes, en régime variable : L'équation de la chaleur (1.18) se réduit alors à l'équation de Fourier :

$$\Delta T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (1.21)$$

1.4.3. Expressions mathématiques de l'équation de la chaleur

Selon la configuration géométrique, l'équation de conduction peut s'écrire donc :

- ✓ En coordonnées cartésiennes (x,y,z) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{P(x,y,z,t)}{\lambda} = 0 \qquad (1.22)$$

✓ En coordonnées cylindriques (r,θ,z) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{P(r,\theta,z,t)}{\lambda}=0 \qquad (1.23)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique dont la température ne dépend que de « r » distance à l'axe et du temps « t », le champ de température peut s'écrire sous une forme simplifiée :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{P(r,t)}{\lambda}=0 \qquad (1.24)$$

✓ En coordonnées sphériques (r,θ,ϕ) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{P(r,\theta,\phi,t)}{\lambda}=0 \qquad (1.25)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie sphérique où la température ne dépend que de « r » distance au centre de symétrie et du temps « t », le champ de température peut s'écrire sous une forme simplifiée :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{P(r,t)}{\lambda}=0 \qquad (1.26)$$

1.4.4. Conditions initiales et aux limites

Ces conditions dépendent évidement du problème étudié. Elles traduisent le lien entre le milieu étudié et le milieu extérieur. Comme l'équation de la chaleur est de premier ordre en temps et de second ordre en espace, on rappelle que deux conditions aux limites dans chaque direction et une condition temporelle (condition initiale) sont exigées pour aboutir à une solution de l'équation.

1.4.4.1. Conditions initiales

Les conditions initiales sont indispensables pour l'étude des processus transitoire d'ailleurs elles interviennent seulement dans ce cas. Elles définissent l'état thermique initial du système. Cela veut dire que la distribution de température à l'intérieur du solide et sur sa surface est supposée connue à l'instant t = 0 : $T(x, y, z, t=0) = T_0(x, y, z)$.

1.4.4.2. Conditions aux limites

Les conditions aux limites peuvent avoir plusieurs fromes (voir figure 1.5). Usuellement, on distingue trois types de conditions :

a) **Conditions aux limites du premier type (Température imposée) :** appelée aussi conditions aux limites de Dirichlet**.** La température en tout point « M » à la surface est connue à tout instant $T(M,t) = T_p(M,t)$. Si T_p = Cte, on a une condition d'isotherme.

b) **Conditions aux limites du deuxième type (Densité de flux imposée) :** appelée aussi conditions aux limites de Newman**.** Dans ce cas, la densité de flux thermique en tout point « M » sur la paroi est connue :

$$\varphi(M,t)=\varphi_0(M,t)=-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_M \qquad (1.27)$$

Si $\varphi_0 = 0$, on a une condition d'adiabacité (surface isolée ou adiabatique).

c) Conditions aux limites du troisième type (mixte) : appelée aussi conditions aux limites de Fourier ou de Robin. Cette condition implique qu'on dispose d'un échange convectif et radiatif sur la surface limite. Cela revient donc à écrire :

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_M = h(T_p - T_\infty) + \varphi_{rad} \qquad (1.\ 28)$$

Avec h : coefficient d'échange convectif ($W.m^{-2}.K^{-1}$)

T_∞ : température du milieu extérieur.

φ_{rad} : désigne la densité de flux rayonné ($W.m^{-2}$) souvent négligée. Elle est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$\varphi_{rad} = \varepsilon\sigma(T_p^{\,4} - T_\infty^{\,4}) \qquad (1.29)$$

Où ε : émissivité de la paroi, coefficient sans unité compris entre 0 et 1 (corps noirs ε=1)

σ : constante de Stefan-Boltzmann égale $5.67\ 10^{-8}\ W\ m^{-2}K^{-4}$

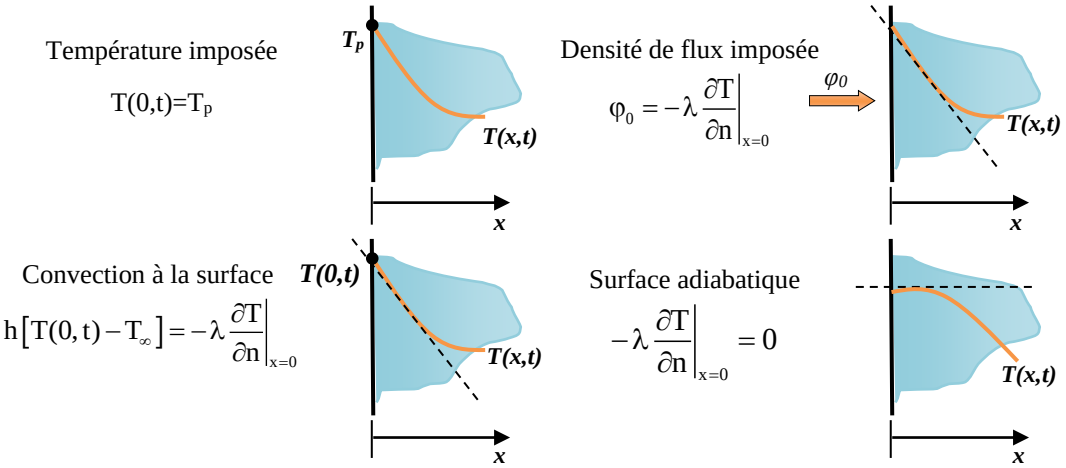


Figure 1.5 : Conditions aux frontières

1.5. Conduction en régime permanent sans génération interne

Dans cette partie, nous allons considérer uniquement des milieux passifs (P=0), en régime permanent $(\partial T/\partial t = 0)$ et unidimensionnelle $(\partial^2 T/\partial y^2 = 0 \text{ et } \partial^2 T/\partial z^2 = 0)$. Dans ces conditions, l'équation de conduction 1.22 se réduit à l'équation de Laplace $(\partial^2 T/\partial x^2 = 0)$. Ensuite, et en tenant compte de ces hypothèses, on aborde la résolution l'équation de conduction pour les configurations géométriques les plus répondues dans la pratique à savoir : les murs, les cylindres creux et les sphère creuses.

1.5.1. Murs plans

On appellera mur plan un milieu limité par deux plans parallèles infinis dans lequel la chaleur se propage uniquement suivant la normale à ces plans (exemple : un mur en béton de grande surface – une vitre, etc.). En conséquence :

- ✓ Le gradient de température est porté par la normale à ces plans.
- ✓ Les isothermes sont des plans parallèles aux faces.
- ✓ Le champ thermique est unidimensionnel, la température ne dépend que d'une seule variable x, T = *f*(x)

1.5.1.1. Mur simple à surfaces isothermes

On considère un mur d'épaisseur « e » constitué d'un seul matériau de conductivité thermique « λ », ces parois sont maintenues à des températures uniformes, constantes et connues « T_{p_1} » et « T_{p_2} » (on prendra $T_{p_1} > T_{p_2}$). La température en fonction de x pourra être trouvé à partir du modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} = 0 \\ x = 0, T(0) = T_{P_1} \\ x = e, T(e) = T_{P_2} \end{cases} \tag{1.30}$$

Le champ de température s'obtient en intégrant deux fois, soit :

$$T(x) = Ax + B \tag{1.31}$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées à l'aide des conditions aux limites, on a : $\begin{cases} T(0) = T_{P_1} = A \times 0 + B \\ T(e) = T_{P_2} = A \times e + B \end{cases} \rightarrow \; B = T_{P_1} \; ; \quad A = \dfrac{T_{P_2} - T_{P_1}}{e}$

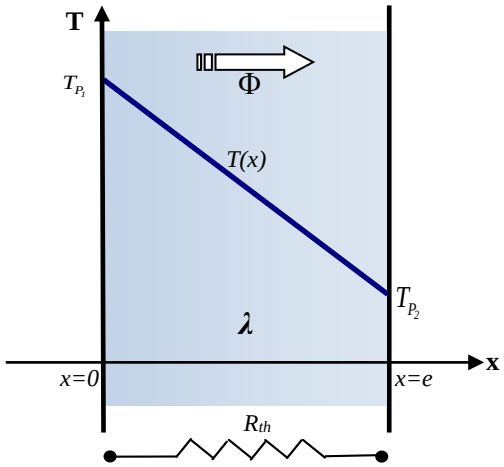


Figure 1.6 : Mur simple à surfaces isotherme

Finalement, le profil de température dans le mur s'écrit sous la forme :

$$T(x) = \frac{T_{P_2} - T_{P_1}}{e} x + T_{P_1} \tag{1.32}$$

Avec : $\dfrac{T_{P_2} - T_{P_1}}{e} = \dfrac{dT}{dx} = \vec{\text{grad}}T = -\dfrac{\varphi}{\lambda}$ (pente de la droite T(x))

La densité de flux thermique est calculée à partir de la loi de Fourier, soit :

$$\varphi = -\lambda \vec{\text{grad}}T = -\lambda \frac{T_{P_2} - T_{P_1}}{e} = \lambda \frac{T_{P_1} - T_{P_2}}{e} \tag{1.33}$$

Comme $T_{p_1} > T_{p_2}$, φ est positif suivant l'axe Ox (axe de propagation de la chaleur), ainsi le flux thermique (ou puissance thermique) traversant la surface S du mur est donné par :

$$\Phi = \varphi \times S = \lambda \frac{T_{P_1} - T_{P_2}}{e} \times S = \frac{T_{P_1} - T_{P_2}}{\left(\frac{e}{\lambda S}\right)} \tag{1.34}$$

Il est possible de construire une analogie électrique où : Le flux « Φ » est analogue à un courant électrique « I » passant dans une résistance « R ». L'écart de température $T_{p_1} - T_{p_2}$ est analogue à une différence de potentiel (ou tension) « V » aux bornes de la résistance « R ».

D'après la loi d'Ohm V = RI et en conduction $T_{P_1} - T_{P_2} = \frac{e}{\lambda S}\Phi$. Autrement dit $\frac{e}{\lambda S}$ peut être considérée comme analogue à une résistance électrique.

On pourra ainsi définir $R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{e}{\lambda S}$ comme la ***résistance thermique*** du mur, sont inverse $\frac{1}{R_{th}}$ est appelé ***conductance thermique***.

1.5.1.2. Mur simple avec convection aux surfaces

Considérons maintenant le cas de transfert de chaleur dans un mur simple séparant deux milieux fluides en mouvement. La chaleur est transférée entre le fluide chaud ayant « $T_{\infty 1}$ » et le fluide froid ayant la température « $T_{\infty 2}$ ». Entre les parois et les fluides s'établies un échange convectif, on suppose que les températures et les coefficients d'échanges convectifs afférents aux fluides sont constants et uniformes par rapport aux surfaces de contact.

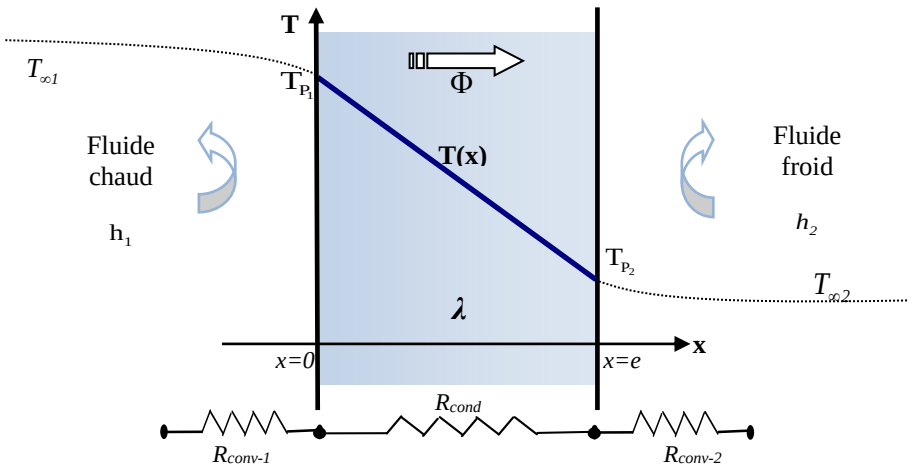


Figure 1.7 : Mur simple à surfaces isotherme en contact avec deux fluides

En régime permanent, le flux thermique traversant le mur se conserve et s'écrit sous la forme :

$$\Phi = h_1 S(T_{\infty 1} - T_{P_1}) = \frac{T_{P_1} - T_{P_2}}{\frac{e}{\lambda S}} = h_2 S\left(T_{P_2} - T_{\infty_2}\right) \tag{1.35}$$

Ou encore :

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{P_1}}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{T_{P_1} - T_{P_2}}{\frac{e}{\lambda S}} = \frac{T_{P_2} - T_{\infty_2}}{\frac{1}{h_2 S}} \tag{1.36}$$

Le flux thermique traversant le mur peut s'écrire alors sous la forme :

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}} \tag{1.37}$$

On définit aussi des résistances convectives R_{conv} telles que : $R_{conv-1} = \frac{1}{h_1 S}$ et $R_{conv-2} = \frac{1}{h_2 S}$

1.5.1.3. Mur simple avec conductivité thermique variable

Le facteur qui influe le plus la conductivité thermique des solides est la température. En général, pour les solides homogènes on peut faire l'approximation que la conductivité thermique varie linéairement avec la température, soit :

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta T) \tag{1.38}$$

Où : λ_0 est la conductivité à T = 0 °C et β est le coefficient caractéristique de chaque matériau il est usuellement négatif pour les métaux et alliages, et positif pour les mauvais conducteurs. La densité de flux dans ce cas peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi = -\lambda_0 (1 + \beta T) \frac{dT}{dx} \tag{1.39}$$

En utilisant la séparation des variables et l'intégration entre les limites : x = 0 ($T = T_{p_1}$) et x = e ($T = T_{p_2}$), on obtient :

$$\varphi \int_0^e dx = -\int_{T_{p_1}}^{T_{p_2}} \lambda_0 (1 + \beta T) dT \tag{1.40}$$

Ce qui donne :

$$\varphi \times e = -\lambda_0 \left[T + \beta \frac{T^2}{2} \right]_{T_{p_1}}^{T_{p_2}} \tag{1.41}$$

En remplaçant les bornes d'intégration et réarrangeant l'équation (1.41), on obtient :

$$\varphi = \frac{\lambda_0}{e} \left(1 + \beta \frac{T_{p_1} + T_{p_2}}{2} \right) \left(T_{p_1} - T_{p_2} \right) \tag{1.42}$$

Il vient :

$$\varphi = \frac{T_{p_1} - T_{p_2}}{\frac{e}{\lambda_{moy}}} \tag{1.43}$$

Avec : λ_{moy} est la conductivité thermique moyenne dans l'intervalle de température $T_{p_1} - T_{p_2}$ calculée par une moyenne intégrale :

$$\lambda_{moy} = \frac{1}{T_{p_1} - T_{p_2}} \int_{T_{p1}}^{T_{p2}} \lambda_0 (1 + \beta.T) dT = \lambda_0 \left(1 + \beta \frac{T_{p_1} + T_{p_2}}{2} \right) = \lambda_0 (1 + \beta T_{moy}) \tag{1.44}$$

<u>Remarque</u> : on peut aussi déterminer la conductivité moyenne par une moyenne arithmétique, soit : $\lambda_{moy} = \frac{\lambda(T_{p_1}) + \lambda(T_{p_2})}{2}$

Pour trouver le champ de température dans le mur, on intègre l'équation (1.39) entre les limites x = 0 ($T = T_{p_1}$) et une distance quelconque « x » (T = T(x)) :

$$\varphi\int_0^x dx = -\int_{T_{p_1}}^{T(x)} \lambda_0\left(1+\beta T\right)dT \tag{1.45}$$

Ou encore :

$$-\varphi x = \lambda_0\left[T+\beta\frac{T^2}{2}\right]_{T_{p_1}}^{T(x)} \tag{1.46}$$

$$\frac{-\varphi x}{\lambda_0} = T(x)+\frac{\beta}{2}T^2(x)-T_{p_1}-\frac{\beta}{2}T^2{}_{p_1} \tag{1.47}$$

Faisant le rapport (1.47) /β, et on multiplie par 2 les deux membres, l'équation (1.47) devient :

$$\frac{-2\varphi x}{\lambda_0\beta} = \frac{2}{\beta}T(x)+T^2(x)-\frac{2}{\beta}T_{p_1}-T_{p_1}^2 \tag{1.48}$$

Ajoutant et soustrayant le terme $\frac{1}{\beta^2}$ au second membre de l'équation (1.48), on aura :

$$\frac{-2\varphi x}{\lambda_0\beta} = \frac{2}{\beta}T(x)+T^2(x)-\frac{2}{\beta}T_{p_1}-T^2{}_{p_1}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\beta^2}$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{2\varphi x}{\lambda_0\beta} = -\left(T(x)+\frac{1}{\beta}\right)^2+\left(T_{p_1}+\frac{1}{\beta}\right)^2 \tag{1.49}$$

D'où le champ de température dans le mur suit une variation parabolique qui a pour expression :

$$T(x) = \sqrt{\left(T_{p_1}+\frac{1}{\beta}\right)^2-\frac{2\varphi x}{\lambda_0\beta}}-\frac{1}{\beta} \tag{1.50}$$

La figure ci-dessous illustre le champ de température dans le mur considéré. Selon le signe de β trois cas sont à envisager : β > 0, β = 0 et β < 0

β = 0 : λ = λ₀ : la conductivité thermique est constante

β > 0 : concavité vers le haut

β < 0 : concavité vers le bas

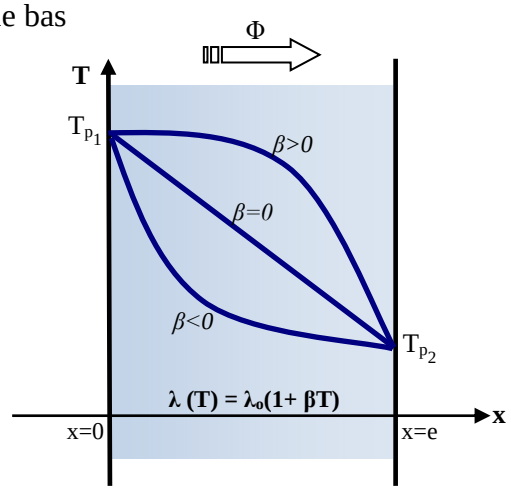


Figure1.8 : Mur simple avec conductivité thermique variable

Exemple 1.1 : Le mur d'un four est construit par des briques réfractaires ayant une épaisseur de 250 mm dont les températures sur les faces internes et externes sont maintenues respectivement à 1350 °C et 50 °C. La loi de variation de la conductivité thermique est donnée par la relation

suivante : $\lambda = 0.838\left(1+7\times10^{-4}T\right)$ W/m.K. Déterminer la température à une distance x = 125 mm par rapport à la face chaude du mur.

Solution :

- On calcul d'abord la conductivité thermique moyenne **:**

$$\lambda_{moy} = 0.838\left(1+7\times10^{-4}\frac{1350+50}{2}\right) = 1.24862\ \text{W/m.K}$$

- La densité de flux est donc :

$$\varphi = \frac{1350-50}{\frac{0.25}{1.24862}} = 6492.824\ \text{W/m}^2$$

- La température à un point distant de 125 mm de la paroi chaud a pour valeur :

$$T(x=125\text{mm}) = \sqrt{\left(1350+\frac{1}{7\times10^{-4}}\right)^2 - \frac{2\times6492.824\times0.125}{0.838\times7\times10^{-4}}} - \frac{1}{7\times10^{-4}} = 797\ ^{o}\text{C}$$

1.5.1.4. Mur composite : association en série

On appelle mur composite, la juxtaposition de plusieurs murs simples constitués de matériaux différents, limités par des plans parallèles en contact parfait (aucune résistance de passage) les uns avec les autres. La figure 1.9 représente un mur composite constitué de plusieurs couches accolées en série d'épaisseur respective « e_i » et de conductivité thermique « λ_i » (i=1, 2, …, n).

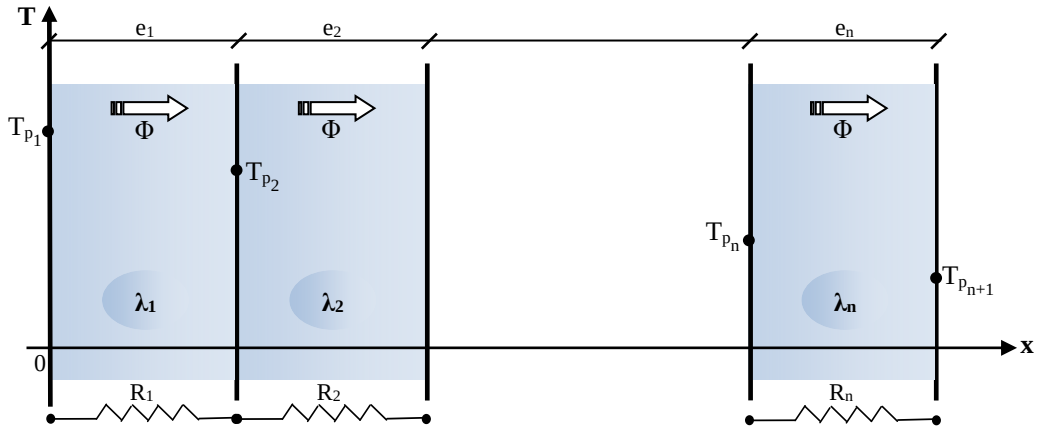


Figure 1.9 : Schéma d'un mur composite en série

Etant donné que le flux thermique « Φ » est conservé (Φ = Cte, à travers n'importe quel plan parallèle au paroi), on peut écrire alors :

$$\Phi = \frac{T_{P_1}-T_{P_2}}{\left(\frac{e_1}{\lambda_1 S}\right)} = \frac{T_{P_2}-T_{P_3}}{\left(\frac{e_2}{\lambda_2 S}\right)} = \text{.....} = \frac{T_{P_n}-T_{P_{n+1}}}{\left(\frac{e_n}{\lambda_n S}\right)} \qquad (1.51)$$

$$\Phi = \frac{T_{P_1} - T_{P_{n+1}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{\lambda_i S}} = \frac{T_{P_1} - T_{P_{n+1}}}{\sum_{i=1}^{n} R_{th_i}} \tag{1.52}$$

Si les parois extrêmes du mur échangent par convection avec des milieux fluides, le flux échangé entre les deux fluides en fonction des températures des fluides, des caractéristiques du mur et des coefficients d'échange convectifs peut être évaluer par l'expression suivante :

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1 S} + \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{\lambda_i S} + \frac{1}{h_2 S}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\sum_{i=1}^{n} R_{th_i}} \tag{1.53}$$

1.5.1.5. Mur composite : association en parallèle

Les parois composites ne sont qu'un cas particulier de murs, planchers ou toitures terrasses existants dans le bâtiment. En effet, les parois peuvent présenter des discontinuités de matériaux dans le sens de la hauteur et/ou de la largeur. Considérons à titre d'exemple le mur schématisé ci-dessous. On ne peut plus raisonner en flux surfacique mais en flux de chaleur, puisque les matériaux n'ont pas la même constitution et n'offrent pas la même surface au passage de la chaleur, dans ce cas le flux total est donné par :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{T_{P_1} - T_{P_2}}{\left(\frac{e}{\lambda_1 S_1}\right)} = \frac{T_{P_1} - T_{P_2}}{\left(\frac{e}{\lambda_2 S_2}\right)} = (T_{P_1} - T_{P_2}) \left(\frac{1}{\frac{e}{\lambda_1 S_1}} + \frac{1}{\frac{e}{\lambda_2 S_2}} \right) \tag{1.54}$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$\Phi = \frac{T_{P_1} - T_{P_2}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{T_{P_1} - T_{P_2}}{R_{eq}} \tag{1.55}$$

Où R_{eq} représente la résistance équivalente : $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$

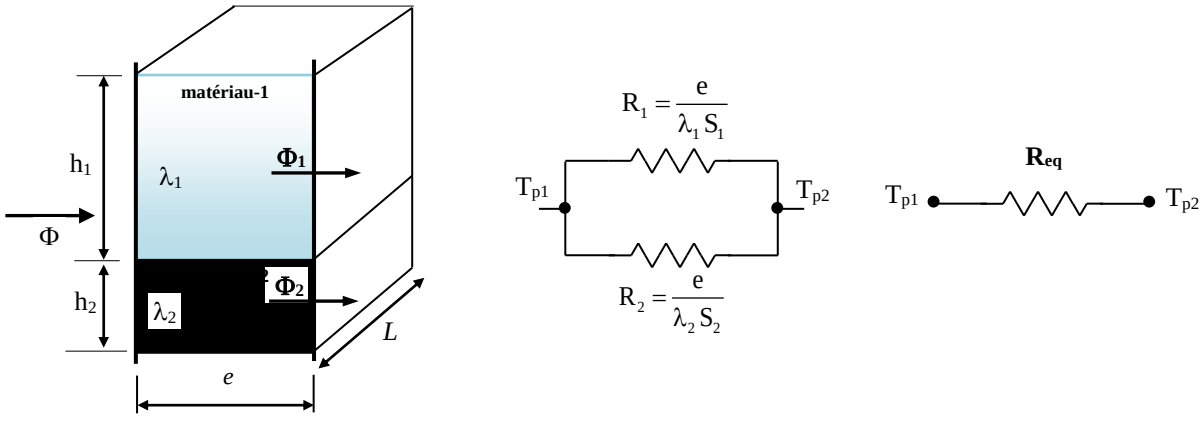


Figure 1.10 : Schéma et circuit électrique équivalent d'un mur composite en parallèle

Ce type de mur est le plus couramment rencontré dans la réalité où les parois ne sont pas homogènes. Considérons à titre d'exemple un mur de largeur « L » constitué de matériaux

différents (voir figure 1.11). En utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle, la résistance thermique totale est calculée par : $R_{totale} = \sum R_{th} = R_1 + R_{eq} + R_4$

Expression dont laquelle « R_{eq} » est la résistance équivalente donnée par : $R_{eq} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}$

Ou ainsi par la relation suivante : $R_{eq} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4}} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}}$

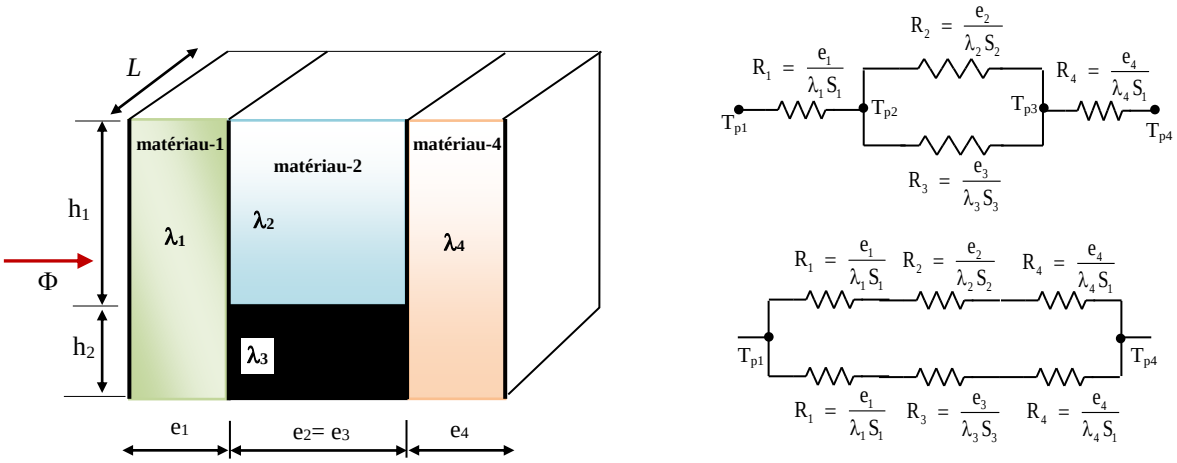


Figure 1.11 : Schéma et circuit électrique équivalent d'un mur composite série-parallèle

1.5.2. Cylindre creux à surfaces latérales isothermes

Considérons un tube creux de forme cylindrique de très grande longueur par rapport au rayon intérieur « r_1 » et extérieur « r_2 » et dont les surfaces cylindriques sont maintenues à des températures uniformes et constantes « T_{p_1} » et « T_{p_2} ». En coordonnées cylindriques, à symétrie axiale avec L >> r, la variable « z » n'intervient pas et donc la propagation de la chaleur est radiale, les isothermes sont alors des surfaces cylindriques coaxiales.

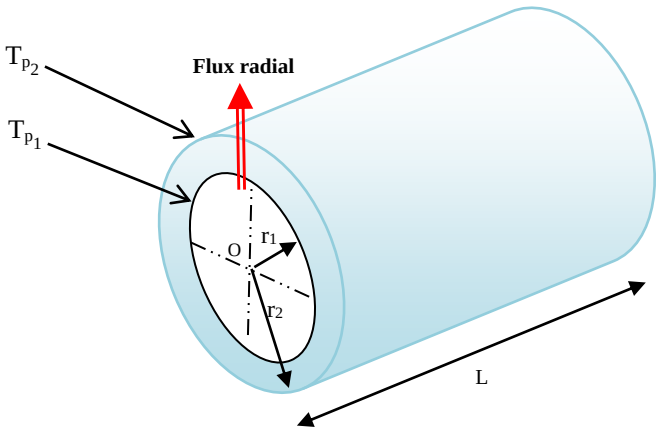


Figure 1.12 : Cylindre creux à surfaces isothermes

Nous allons suivre le même raisonnement que dans le cas du mur simple. La température n'est fonction que du rayon « r_i », elle peut être trouvée donc à partir de l'équation (1.24) :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dT}{dr}=0 \\ T(r)=T_{P_1} \quad \text{pour} \quad r=r_1 \\ T(r)=T_{P_2} \quad \text{pour} \quad r=r_2 \end{cases} \tag{1.56}$$

On pose $U=\dfrac{dT}{dr}$ on obtient l'équation du premier ordre $\dfrac{dU}{dr}+\dfrac{1}{r}U=0$ dont la solution est $U=\dfrac{A}{r}$. Si d'autre part, on remplace U par son expression, on obtient $\dfrac{dT}{dr}=\dfrac{A}{r}$

Après intégration, le profil de température radial aura la forme :

$$T(r)=A\ln r+B \tag{1.57}$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminer à partir des conditions aux limites :

$$\begin{cases} T_{p_1}=A\ln r_1+B \\ T_{p_2}=A\ln r_2+B \end{cases} \Rightarrow \quad A=\frac{T_{p_1}-T_{p_2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \;\; ; \quad B=T_{p_1}-\frac{T_{p_1}-T_{p_2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\ln r_1$$

On remplace A et B dans l'équation (1.57), le profil de température peut se mettre sous la forme suivante :

$$T(r)=T_{P_1}+\frac{T_{P_1}-T_{P_2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \tag{1.58}$$

On peut déduire maintenant l'expression de la densité de flux thermique qui traverse le cylindre en « r » quelconque en appliquant la loi de Fourier :

$$\varphi(r)=-\lambda\overrightarrow{\text{grad}T}=-\lambda\frac{dT}{dr}=\lambda\frac{T_{P_1}-T_{P_2}}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\frac{1}{r} \tag{1.59}$$

Ainsi, le flux thermique qui traverse chaque surface du cylindre s'obtient comme suit :

$$\Phi=\varphi\times S=\lambda\frac{T_{P_1}-T_{P_2}}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\times\frac{1}{r}\times\underset{\text{surface}}{2\pi rL}=2\pi\lambda L\frac{T_{P_1}-T_{P_2}}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{1.60}$$

$$\Phi=\frac{T_{P_1}-T_{P_2}}{\frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}=\frac{T_{P_1}-T_{P_2}}{R} \tag{1.61}$$

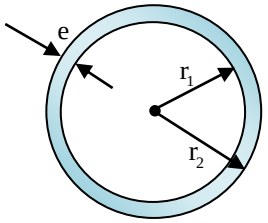
R est la résistance thermique du tube cylindrique. Dans le cas général elle s'écrit :

$$R=\frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right) \tag{1.62}$$

Avec r_{int} et r_{ext} sont respectivement les rayons interne et externe de la couche en question.

Remarque : Cas d'un tube mince d'épaisseur « e »

$$\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)=\ln\left(\frac{r_1+e}{r_1}\right)=\ln\left(1+\frac{e}{r_1}\right)\approx\frac{e}{r_1} \quad \text{d'où :} \quad \Phi=\frac{T_{P_1}-T_{P_2}}{\frac{e}{2\pi r_1 L\lambda}}$$



1.5.2.1. Cylindre multicouche avec convection aux surfaces

On utilise le meme raisonnement que celui des murs plans. Dans ce cas, le flux thermique perdu vers l'extérieur du tube cylindrique peut alors s'écrire sous la forme :

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\underbrace{\frac{1}{h_{int} \times S_{int}}}_{R_{conv-1}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi\lambda_1 L}\ln\frac{r_2}{r_1}}_{R_{cond-1}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi\lambda_2 L}\ln\frac{r_3}{r_2}}_{R_{cond-2}} + \underbrace{\frac{1}{h_{ext} \times S_{ext}}}_{R_{conv-2}}} \qquad (1.63)$$

Avec : $S_{int} = 2\pi r_1 L$ et $S_{ext} = 2\pi r_3 L$

h_{int} : coefficient d'échange convectif intérieur en W/m².°C

h_{ext} : Coefficient d'échange convectif extérieur en W/m².°C

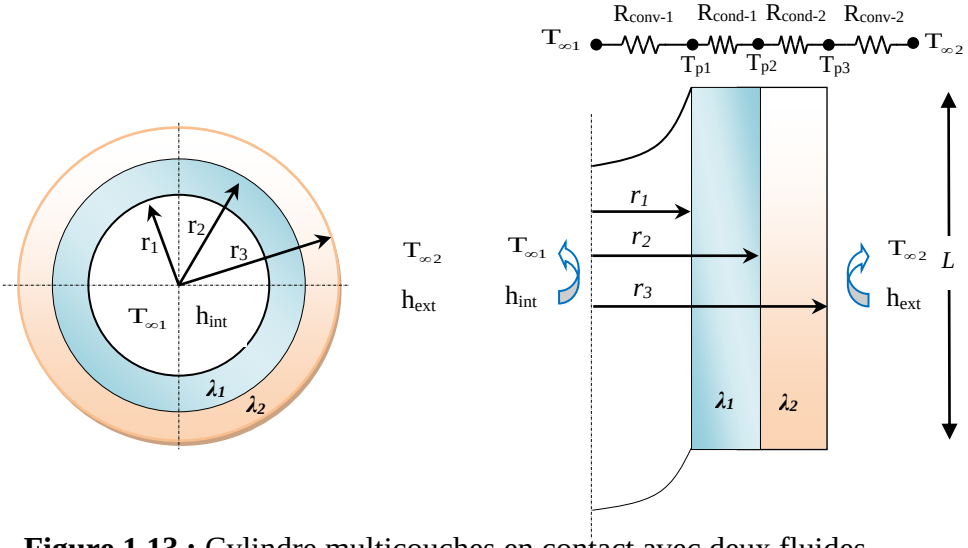


Figure 1.13 : Cylindre multicouches en contact avec deux fluides

1.5.3. Sphère creuse à surfaces isothermes

Considérons une sphère de rayon intérieur « r_1 » et extérieur « r_2 » dont les surfaces limites sont à des températures uniformes et constantes « T_{p_1} » et « T_{p_2} ». Les isothermes dans ce cas sont des surfaces sphériques concentriques, et la température n'est fonction que du rayon « r ». La distribution de température est déterminée à partir de l'équation (1.26) :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dT}{dr} = 0 \\ T(r) = T_{P_1} \quad pour \quad r = r_1 \\ T(r) = T_{P_2} \quad pour \quad r = r_2 \end{cases} \qquad (1.64)$$

Ce problème est semblable au précédent. En posant $U = \dfrac{dT}{dr}$ on obtient l'équation du premier ordre $\dfrac{dU}{dr} + \dfrac{2}{r}U = 0$ dont la solution est $U = \dfrac{A}{r^2}$. Remplaçant U par son expression, on obtient $\dfrac{dT}{dr} = \dfrac{A}{r^2}$. Après intégration, le profil de température aura la forme :

$$T(r) = \frac{-A}{r} + B \qquad (1.65)$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées à partir des conditions aux limites :

$$\begin{cases} T_{p_1} = -\dfrac{A}{r_1} + B \\ T_{p_2} = -\dfrac{A}{r_2} + B \end{cases} \Rightarrow \quad A = \frac{T_{p_1} - T_{p_2}}{\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)} \;\; ; \;\; B = T_{p_1} + \frac{\dfrac{T_{p_1} - T_{p_2}}{\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)}}{r_1}$$

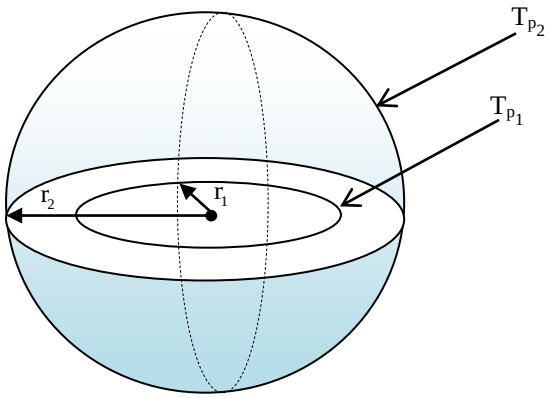


Figure 1.14 : Sphère creuse à surfaces isothermes

D'où, l'expression finale du champ de température s'écrit :

$$T(r) = T_{p_1} + \frac{(T_{P_1} - T_{P_2})}{\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \tag{1.66}$$

On en déduit la densité du flux thermique :

$$\varphi(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} = \lambda \frac{\left(T_{P_1} - T_{P_2}\right)}{\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)} \times \frac{1}{r^2} \tag{1.67}$$

Le flux thermique qui traverse chaque surface sphérique est :

$$\Phi = \varphi \times S = \lambda \frac{T_{P_1} - T_{P_2}}{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}} \times \frac{1}{r^2} \times \underset{\text{surface}}{4\pi r^2} = \frac{T_{P_1} - T_{P_2}}{\dfrac{1}{4\pi\lambda}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)} = \frac{T_{P_1} - T_{P_2}}{R} \tag{1.68}$$

Avec, « R » est la résistance thermique donnée par :

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{1.69}$$

Dans le cas général, pour chaque couche sphérique, la résistance par conduction est évaluée par : $R = \dfrac{1}{4\pi\lambda}\left(\dfrac{1}{r_{int}} - \dfrac{1}{r_{ext}}\right)$ avec r_{int} et r_{ext} sont respectivement les rayons interne et externe de la couche en question.

1.5.4. Synthèse des résultats obtenus

Nous récapitulons dans le tableau suivant les résultats obtenus pour les différentes configurations géométriques traitées précédemment :

	Mur plan	**Cylindre creux**	**Sphère creuse**
Equation	$\frac{d^2T}{dx^2}=0$	$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=0$	$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dT}{dr}=0$
Profil	$T(x)=\frac{T_{p_2}-T_{p_1}}{e}x+T_{p_1}$	$T(r)=T_{p_1}+\frac{T_{p_1}-T_{p_2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$	$T(r)=T_{p_1}+(T_{p_1}-T_{p_2})\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}}$
Flux thermique	$\Phi=\frac{T_{p_1}-T_{p_2}}{\frac{e}{\lambda S}}$	$\Phi=\frac{T_{p_1}-T_{p_2}}{\frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$	$\Phi=\frac{T_{p_1}-T_{p_2}}{\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$
Résistance thermique	$R=\frac{e}{\lambda S}$	$R=\frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$	$R=\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

Tableau 1.2 : Résultats de la conduction unidimensionnelle sans génération de chaleur

1.6. Conduction en régime permanent avec génération interne

Dans la section précédente, nous avons considéré les problèmes de conduction pour lesquels la distribution de température dans le milieu n'est influencée uniquement par les conditions aux limites. Nous voulons maintenant considérer un effet supplémentaire sur la distribution de la température en particulier, l'énergie thermique générée à l'intérieur de celui-ci.

Ce type de milieu est dite milieu actif ($P \neq 0$) qu'on peut le rencontrer dans de nombreux applications pratiques : plancher chauffant par serpentin ou par des résistances électriques, réacteurs nucléaires, foyers de chaudière, réacteurs chimiques, etc.

L'énergie interne dégagée par unité de temps et de volume peut être uniforme et constante dans le temps, ou dépendre directement de la température du point considéré, dépendre de ses coordonnées, dépendre à la fois de sa température et de ses coordonnées.

1.6.1. Mur plan avec source interne

Une grande paroi plane d'épaisseur e = 2L constituée d'un seul matériau de conductivité thermique λ, est le siège d'un échauffement interne d'intensité uniforme « P » par unité de volume (P = Cte). Les surfaces isothermes sont maintenues à des températures uniformes, constantes et connues « T_{p_1} » et « T_{p_2} » dont $T_{p_1} > T_{p_2}$ (voir figure 1.15a). Le champ de température dans ce cas peut être trouvé à partir du modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2}=-\dfrac{P}{\lambda} \\ \\ x=+L, \quad T(+L)=T_{p_1} \\ x=-L, \quad T(-L)=T_{p_2} \end{cases} \tag{1.70}$$

La solution générale est : $$T(x)=-\frac{P}{2\lambda}x^2+Ax+B \tag{1.71}$$

La répartition de température est parabolique. Les constantes d'intégration A et B sont évaluées à l'aide des conditions aux limites :

$A = \dfrac{T_{P_2} - T_{P_1}}{2L}$; $B = \dfrac{P}{2\lambda}L^2 + \dfrac{T_{P_1} + T_{P_2}}{2}$. D'où, le profil de température s'écrits :

$$T(x) = \frac{PL^2}{2\lambda}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{T_{P_2} - T_{P_1}}{2}\frac{x}{L} + \frac{T_{P_2} + T_{P_1}}{2} \qquad (1.72)$$

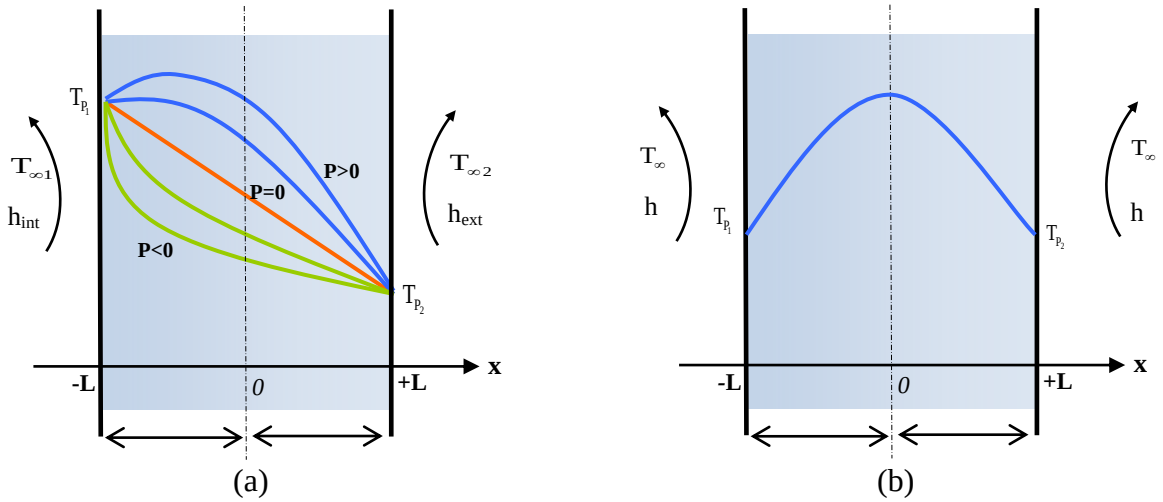


Figure 1.15 : Mur plan avec une production de chaleur uniforme :

(a) Conditions aux limites asymétriques, (b) Conditions aux limites symétriques

Le profil de température est parabolique et admet un extremum pour (dT/dx = 0) :

$$x_{max} = \frac{\lambda}{2PL}\left(T_{p_2} - T_{p_1}\right) \qquad (1.73)$$

La température est maximale en x = x_{max}, l'équation 1.72 donne :

$$T(x_{max}) = T_{max} = \frac{PL^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{8PL^2}\left(T_{P_2} - T_{P_1}\right)^2 + \frac{T_{P_2} + T_{P_1}}{2} \qquad (1.74)$$

On peut simplifier le résultat précédent quand les deux surfaces sont maintenues à la même température $T_{p_1} = T_{p_2} = T_p$. La distribution de la température est alors symétrique par rapport au plan médian (voir figure 1.15b) :

$$T(x) = \frac{PL^2}{2\lambda}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + T_p \qquad (1.75)$$

Dans ce cas, la température maximale est au plan médian (centre du mur, x = 0) :

$$T(0) = T_{max} = \frac{PL^2}{2\lambda} + T_p \qquad (1.76)$$

A partir de ces deux dernières équations, l'équation 1.75 peut s'écrire :

$$\frac{T(x) - T_p}{T_{max} - T_p} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \text{ , ou } \quad \frac{T(x) - T_{max}}{T_p - T_{max}} = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \qquad (1.77)$$

Il est important de noter qu'au plan médian (symétrie), le gradient de température est nul $\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$, en conséquence, il n'y a pas de transfert de chaleur à travers ce plan.

Le flux traversant chaque plan d'abscisse « x » dans le mur s'écrit :

$$\Phi = -\lambda S \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=+L} = -\lambda S\left(-\frac{Px}{\lambda}\right)_{x=+L} = SPL \qquad (1.78)$$

Remarque : $T_{max} - T_p = \frac{PL^2}{2\lambda}$, soit $p = \frac{T_{max} - T_p}{\frac{L^2}{2\lambda}}$. En reportant dans Φ on tire : $\Phi = \frac{T_{max} - T_p}{\left(\frac{L}{2\lambda S}\right)}$ cette expression est tout à fait comparable avec le même problème en conduction sans génération interne de chaleur pour une distance de « L/2 ».

Pour utiliser les résultats précédents, la température de surface « T_p » doit être connue, cependant, dans des situations courantes est celle pour laquelle la température du fluide « T_∞ » et le coefficient d'échange convectifs « h » sont connues, c'est à dire on se place dans le cas de conditions aux limites du troisième type (convection à la surface), dans telle situation l'équation (1.75) peut être modifiée en faisant un bilan d'énergie au niveau de la surface en question, soit :

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=+L} = h(T_p - T_\infty) \qquad \text{avec} \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=+L} = -\frac{PL}{\lambda} \tag{1.79}$$

Il vient : $$T_p = T_\infty + \frac{PL}{h} \tag{1.80}$$

Si d'autre part on remplace T_p par don expression dans l'équation (1.75), on obtient le champ de température :

$$T(x) = T_\infty + \frac{PL}{h} + \frac{PL^2}{2\lambda}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) \tag{1.81}$$

1.6.2. Mur plan avec source interne dépendant de la position

On rencontre le cas des sources internes qui dépendent de la position dans l'absorption des neutrons par les éléments combustibles ou autres composants d'un réacteur nucléaire, mais également dans les fours à micro-ondes. Considérons un mur plan d'épaisseur « L », de températures de surface « T_{p_1} » et « T_{p_2} » ($T_{p_1} > T_{p_2}$) et soumise sur la face la plus chaude à un rayonnement conduisant à une production interne de chaleur. Cette source interne peut être modélisée par la loi exponentielle suivante : $P(x) = P_0 \exp(-\beta x)$ avec « P_0 » est la valeur de la source en x = 0, « β » est une constante. Le profil de température vérifie donc le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{-P_0 \exp(-\beta x)}{\lambda} \\ \\ x = 0, \;\; T(x) = T_{p_1} \\ x = e, \;\; T(x) = T_{p_2} \end{cases} \tag{1.82}$$

L'intégration de l'équation conduit à :

$$T(x) = -\frac{P_0}{\lambda\beta^2}\exp(-\beta x) + Ax + B \tag{1.83}$$

Les constantes d'intégration sont obtenues à l'aide des conditions aux frontières, soit :

$$B = Tp_1 + \frac{P_0}{\lambda\beta^2} \;\; ; \;\; A = \frac{Tp_2 - Tp_1}{e} + \frac{P_0}{\lambda\beta^2 e}\left[\exp(-\beta e) - 1\right]$$

D'où la répartition de température peut avoir la forme suivante :

$$T(x) = T_{p_1} + \frac{P_0}{\lambda\beta^2}\left[\left(\exp(-\beta x) - 1\right)\frac{x}{e} - \left(\exp(-\beta x) - 1\right)\right] + \frac{T_{p_2} - T_{p_1}}{e}x \tag{1.84}$$

On voit clairement que cette expression est composée d'un terme de conduction sans génération interne de chaleur et d'un terme dû à la source interne d'allure exponentielle. On peut également trouver la puissance totale générée par la source interne comme suit :

$$P_{totale}(x) = \int_0^e P_0 \exp(-\beta x) dV = \frac{P_0 S}{\beta}\left[1 - \exp(-\beta e)\right] \tag{1.85}$$

1.6.3. Tubes cylindriques avec source interne

1.6.3.1. Cylindre plein

Un tube cylindrique plein de rayon « r_0 » constituée d'un seul matériau de conductivité thermique « λ », est le siège d'un échauffement interne d'intensité uniforme « P » par unité de volume (P = Cte). Le champ de température dans ce cas peut être trouvé à partir du modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r} = -\dfrac{P}{\lambda} \\ r = 0, \quad \left(\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \\ r = r_0, \quad T(r_0) = T_P \end{cases} \tag{1.86}$$

L'intégration donne : $$T(r) = -\frac{P}{4\lambda} r^2 + A \ln r + B \tag{1.87}$$

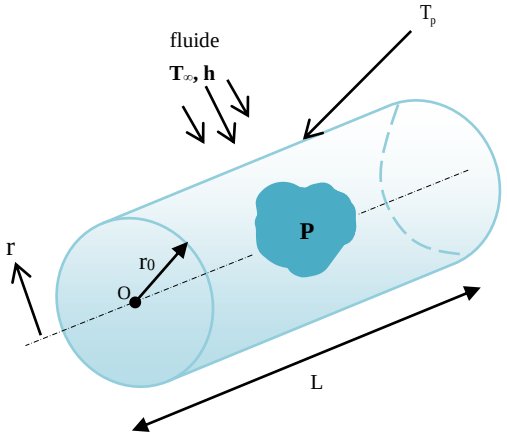


Figure 1.16 : Cylindre plein avec une production de chaleur

Les constantes d'intégration A et B sont évaluées a l'aide des conditions aux limites. A partir de la condition de symétrie (gradient de température doit être nul à la ligne centrale) à r = 0, $0 = \left(\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=0} = -\dfrac{P}{2\lambda} \times 0 + A \ln 0$; il est évident donc que A = 0. La deuxième condition aux limites (température imposée) à r = r_0, $T(r_0) = T_p = -\dfrac{P}{4\lambda} \times r_0^2 + B$ nous donne alors : $B = T_p + \dfrac{P}{4\lambda} r_0^2$. La répartition de la température s'écrit donc :

$$T(r) = \frac{P r_0^2}{4\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) + T_p \tag{1.88}$$

La température maximale, T_{max} est évaluée à l'axe (r = 0), on obtient :

$$T_{max} = \frac{Pr_0^{\,2}}{4\lambda} + T_p \tag{1.89}$$

A partir de ces deux dernières équations, le profil de température peut s'écrire :

$$\frac{T(r) - T_p}{T_{max} - T_p} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \quad \text{, ou} \quad \frac{T(r) - T_{max}}{T_p - T_{max}} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \tag{1.9}$$

Le flux traversant une surface cylindrique de rayon « r » donné et de longueur « L » :

$$\Phi = -\lambda S \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right| = -2\pi\lambda rL\left(-\frac{Pr}{2\lambda}\right) = \pi r^2 PL \tag{1.91}$$

En particulier le flux quittant le cylindre en surface ($r = r_0$) vaut : $\Phi = \pi r_0^{\,2} PL$

Pour utiliser les résultats précédents, la température de surface « T_p » doit être connue, cependant, dans certains cas, on ne connaît que la température du milieu ambiant « T_∞ » et le coefficient d'échange convectif « h », c'est à dire on se place dans le cas de conditions frontières de Fourier (convection à la surface), dans tels cas l'équation (1.88) peut être modifiée :

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0} = h(T_p - T_\infty) \quad \text{, avec} \quad \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0} = -\frac{Pr_0}{2\lambda} \tag{1.93}$$

Il vient ainsi : $$T_p = T_\infty + \frac{Pr_0}{2h} \tag{1.94}$$

Si d'autre part on remplace « T_p », on obtient facilement le champ de température pour le cas de conditions aux limites de Fourier :

$$T(r) = T_\infty + \frac{Pr_0}{2\lambda} + \frac{Pr_0^{\,2}}{4\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^{\,2}}\right) \tag{1.95}$$

1.6.3.2. Cylindre creux : Température imposée aux surfaces

Les conditions aux limites s'écrivent : $r = r_1 \rightarrow T(r_1) = T_{P_1}$, $r = r_2 \rightarrow T(r_2) = T_{P_2}$

Le profil de température dans ce cas peut s'écrire sous la forme :

$$T(r) = T_{p_2} + \frac{P}{4\lambda}\left(r_2^{\,2} - r^2\right) + \left[\left(T_{p_2} - T_{p_1}\right) + \frac{P}{4\lambda}\left(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}\right)\right].\left[\ln\left(\frac{r}{r_2}\right) / \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right] \tag{1.96}$$

Or : $$T(r) = T_{p_1} + \frac{P}{4\lambda}\left(r_1^{\,2} - r^2\right) + \left[\left(T_{p_2} - T_{p_1}\right) + \frac{P}{4\lambda}\left(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}\right)\right].\left[\ln\left(\frac{r}{r_1}\right) / \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right] \tag{1.97}$$

Le rayon auquel la température est maximale :

$$r_{max}^{\,2} = \frac{2\lambda}{P \times \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\left[\left(T_{p_2} - T_{p_1}\right) + \frac{P}{4\lambda}\left(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}\right)\right] \tag{1.98}$$

1.6.3.3. Cylindre creux : Surface interne adiabatique

Les conditions aux limites s'écrivent : $r = r_1 \rightarrow \frac{dT(r_1)}{dr} = 0$, $r = r_2 \rightarrow T(r_2) = T_{P_2}$

Le profil de température dans ce cas a pour expression :

$$T(r) = T_{p_2} + \frac{P}{4\lambda}\left(r_2^{\,2} - r^2\right) + \frac{P}{2\lambda} r_1^{\,2} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) \tag{1.99}$$

La température maximale se produit à la surface interne, soit :

$$T_{max} = T_{p_1} = T_{p_2} + \frac{P}{4\lambda}\left(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}\right) + \frac{P}{2\lambda} r_1^{\,2} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \qquad (1.100)$$

1.6.3.4. Cylindre creux : Surface externe adiabatique

Les conditions aux limites s'écrivent : $r = r_1 \rightarrow T(r_1) = T_{p_1}$, $r = r_2 \rightarrow \dfrac{dT(r_2)}{dr} = 0$

Le profil de température dans cas peut a pour expression :

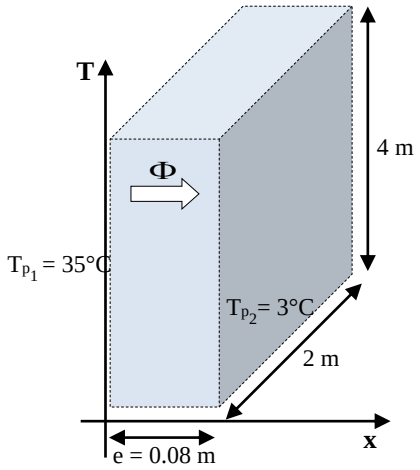
$$T(r) = T_{p_1} + \frac{P}{4\lambda}\left(r_1^{\,2} - r^2\right) + \frac{P}{2\lambda} r_2^{\,2} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \qquad (1.101)$$

La température maximale se produit à la surface externe, soit :

$$T_{max} = T_{p_2} = T_{p_1} - \frac{P}{4\lambda}\left(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}\right) + \frac{P}{2\lambda} r_2^{\,2} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \qquad (1.102)$$

1.7. Exercices sur le chapitre

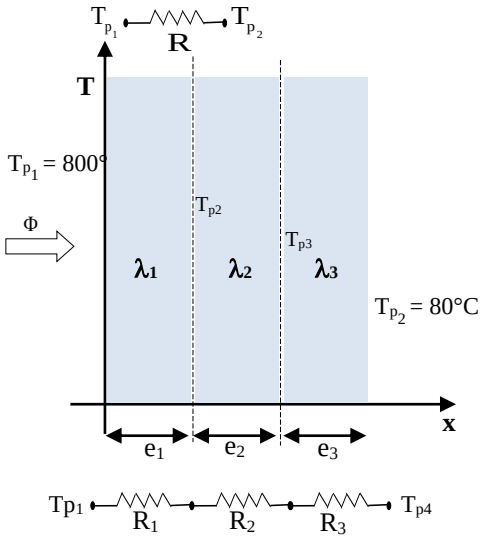
Exercice 01 : Calculer la perte calorifique au travers un mur en briques (λ = 0.69 W/m.°C) de 8 cm d'épaisseur, 4 m de hauteur et de 2 m de largeur. Les températures des deux faces du mur sont respectivement de 35 °C et de 3 °C.



Solution : Les pertes calorifiques du mur sont données par le flux thermique traversant le mur :

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} \Rightarrow \Phi = \frac{T_{p_1} - T_{p_2}}{\dfrac{e}{\lambda S}} \quad \underline{\textbf{AN :}} \quad \Phi = \frac{35-3}{\dfrac{0.08}{0.69(4\times 2)}} = 2208 \ \ W$$

Exercice 02 : Soit un four constitué de trois couches différentes :
Couche 1 : brique réfractaire en silice e_1 = 5 cm λ_1 = 0.8 W/m.°C
Couche 2 : brique réfractaire en argile e_2 = 5 cm λ_2 = 0.16 W/m°C
Couche 3 : brique rouge e_3 = 5 cm λ_3 = 0.4 W/m.°C
Les températures des faces intérieure et extérieure sont respectivement T_{p_1} = 800 °C, T_{p_4} = 80 °C



1.Calculer la résistance thermique du four.
2.En déduire son coefficient d'échange global (conductance).
3.Calculer le flux thermique pour 1 m²
4.Calculer les températures des interfaces et faire le diagramme des températures.

Solution :

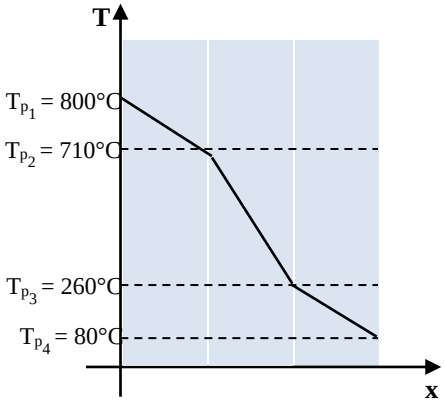
1. Résistance thermique du four : $R = R_1 + R_2 + R_3$

$$R = \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3} = \frac{0.05}{0.8} + \frac{0.05}{0.16} + \frac{0.05}{0.4} = 0.5\ °C/W$$

2. Coefficient d'échange global (conductance) K : Par définition $K = \dfrac{1}{R}$, $K = \dfrac{1}{0.5} = 2\ W/m°C$

3. Le flux transféré par unité de surface (S = 1 m^2) :

$$\Phi = \frac{\left(T_{p_1} - T_{p_4}\right)}{R_{th}} = K \times \left(T_{p_1} - T_{p_4}\right) = 2\left(800 - 80\right) = 1440\ W/m^2$$



4. Températures des interfaces : Etant donnée que le flux est conservé, cela donne :

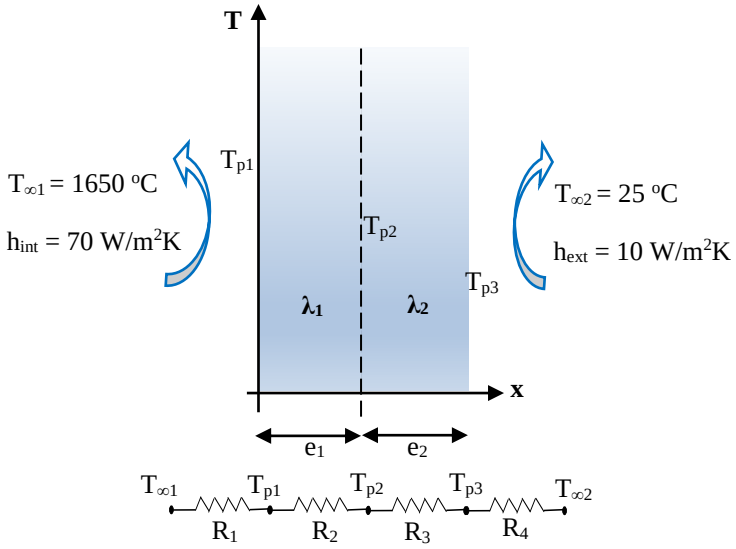
a) $\Phi = \dfrac{T_{p_1} - T_{p_2}}{\dfrac{e_1}{\lambda_1 S}} \Rightarrow T_{p_2} = T_{p_1} - \Phi \dfrac{e_1}{\lambda_1}$; $T_{p_2} = 800 - 1440 \dfrac{0.05}{0.8} = 710\ °C$

b) $\Phi = \dfrac{T_{p_3} - T_{p_4}}{\dfrac{e_3}{\lambda_3 S}} \Rightarrow T_{p_3} = T_{p_4} - \Phi \dfrac{e_3}{\lambda_3}$; $T_{p_3} = 80 + 1440 \dfrac{0.05}{0.4} = 260\ °C$

Le diagramme des températures est illustré ci-contre.

Exercice 03 : Le mur d'un four est composé de deux couches. La première en briques réfractaires possède les caractéristiques e_1 = 0.20 m et λ_1 = 1.38 W/m.°C. La seconde couche en briques isolantes est caractérisée par e_2 = 0.10 m et λ_2 = 0.17 W/m.°C. A l'intérieur du four, la température $T_{\infty 1}$ est de 1650°C, le coefficient d'échange convectif interne h_{int} = 70 W/m^2.°C. L'extérieur est constitué d'air dont la température et le coefficient d'échange convectif sont respectivement $T_{\infty 2}$ = 25 °C et h_{ext} = 10 W/m^2.°C. Calculer :

1. Les pertes de chaleur par unité de surface
2. Les températures de : **a)** la face intérieure, **b)** l'interface, **c)** la face extérieure.
3. Les pentes des droites T(x) pour chaque partie du mur.



Solution

1. Calcul de la perte de chaleur : la perte de chaleur est représentée par le flux thermique traversant le mur :

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\dfrac{1}{h_{int} S} + \dfrac{e_1}{\lambda_1 S} + \dfrac{e_2}{\lambda_2 S} + \dfrac{1}{h_{ext} S}} = \frac{1650 - 25}{\dfrac{1}{70} + \dfrac{0.2}{1.38} + \dfrac{0.1}{0.17} + \dfrac{1}{10}} \quad \underline{\textbf{AN :}}\ \Phi = 1917.52\ W/m^2$$

2. Calcul des températures des facettes $T_{p_1}, T_{p_2}, T_{p_3}$: utilisant la conservation de flux, on obtient :

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{p_1}}{\dfrac{1}{h_{int} S}} \Rightarrow T_{p_1} = T_{\infty 1} - \Phi \frac{1}{h_{int} S} \quad \underline{\textbf{AN :}}\ T_{p_1} = 1650 - \left(191752 \frac{1}{70 \times 1}\right) = 1622.60\ °C$$

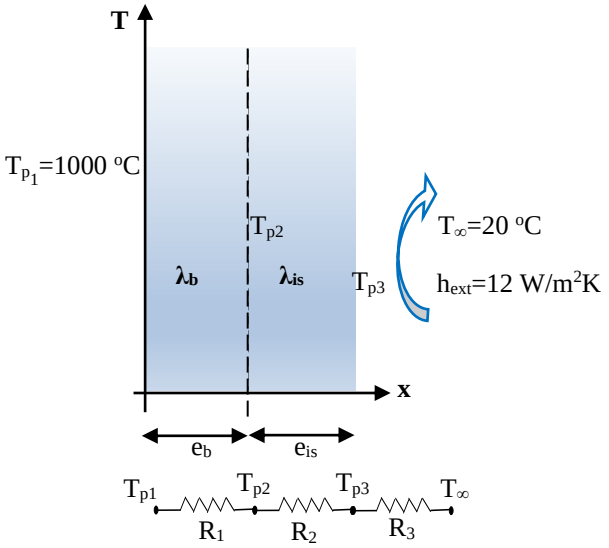
$$\Phi = \frac{T_{p_1} - T_{p_2}}{\frac{e_1}{\lambda_1 S}} \Rightarrow T_{p_2} = T_{p_1} - \Phi \frac{e_1}{\lambda_1 S} \quad \underline{\textbf{AN :}}\ T_{p_2} = 1622.60 - \left(1917.52 \frac{0.2}{1.38 \times 1}\right) = 1344.69\ °C$$

$$\Phi = \frac{T_{p_3} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_{ext} S}} \Rightarrow T_{p_3} = T_{\infty 2} + \Phi \frac{1}{h_{ext} S} \quad \underline{\textbf{AN :}}\ T_{p_3} = 25 + \left(1917.52 \frac{1}{10 \times 1}\right) = 216.752\ °C$$

3. Calcul des pentes : $[\text{Pente}]_1 = \left[\frac{dT}{dx}\right]_1 = \frac{T_{p_2} - T_{p_1}}{e_1}$ ou encore $\left[\frac{dT}{dx}\right]_1 = -\frac{\varphi}{\lambda_1} = -1389.507\ °C/m$

$$[\text{Pente}]_2 = \left[\frac{dT}{dx}\right]_2 = \frac{T_{p_3} - T_{p_2}}{e_1} \text{ ou encore } \left[\frac{dT}{dx}\right]_2 = -\frac{\varphi}{\lambda_2} = -11279.52\ °C/m$$

Exercice 04 : La paroi d'un four industriel est composée de briques et d'isolation extérieure. La conductivité thermique de briques λ_b est égale à 1 $W.m^{-1}K^{-1}$ et d'épaisseur e_b = 0.2 m. La conductivité du matériau isolant : λ_{is} = 0.05 W/m.K. La valeur du coefficient d'échange sur cette surface est h_{ext} = 12 $W.m^{-2}K^{-1}$ et la température T_∞ = 20 °C. Déterminer l'épaisseur de l'isolation e_{is} pour que la température de la paroi extérieure ne dépasse pas T_{p3}=40°C. La température de la paroi à l'intérieur du four T_{p_1} est régulée à 1000 °C.



Solution

On calcul d'abord le flux thermique entre T_{p_3} et T_∞

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} = \frac{T_{p_3} - T_\infty}{\frac{1}{h_{ext}}} = \frac{40 - 20}{\frac{1}{12}} = 240\ W/m^2.$$

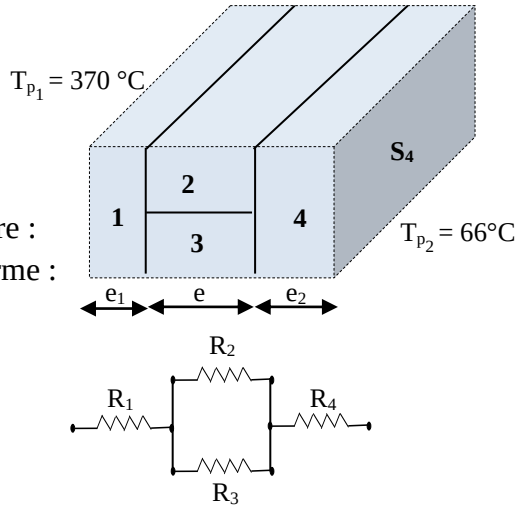
L'épaisseur de l'isolant e_{is}, est donc :

$$\varphi = \frac{T_{p_1} - T_{p_3}}{\frac{e_b}{\lambda_b} + \frac{e_{is}}{\lambda_{is}}} \Rightarrow e_{is} = \frac{\lambda_{is}}{\varphi}\left(T_{p_1} - T_{p_3} - \frac{\varphi e_b}{\lambda_b}\right)$$

$\underline{\textbf{AN :}}\ e_{is} = 0.19\,m$

Exercice 05 : Déterminer le flux thermique traversant le mur composite représenté par la figure ci-contre.

e_1 = 3.5 cm $S_2 = S_3$
e = 7.5 cm $S_4 = S_1 = 0.1\ m^2$
e_2 = 5.0 cm



Solution :

Le schéma électrique équivaut du système est illustré ci-contre :

Le flux thermique traversant le mur peut se mettre sous la forme :

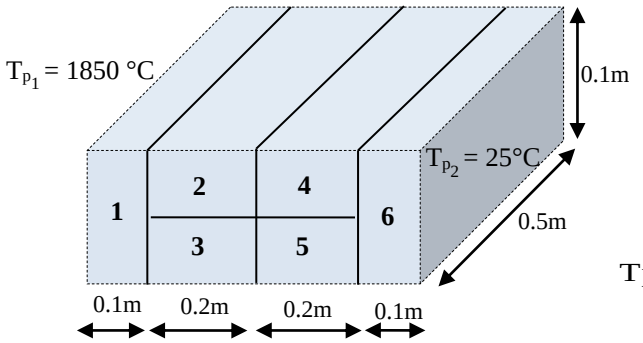
$$\Phi = \frac{T_{p_1} - T_{p_2}}{R_1 + R_{eq} + R_4}$$

Calculons la résistance thermique équivalente R_{eq} :

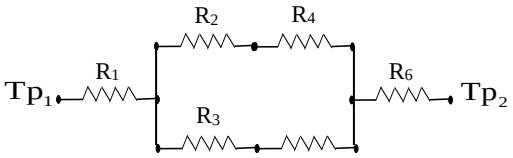
$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}=\frac{1}{\frac{e}{\lambda_2\left(\frac{S}{2}\right)}}+\frac{1}{\frac{e}{\lambda_3\left(\frac{S}{2}\right)}}=\frac{S(\lambda_2+\lambda_3)}{2e}\text{, ou encore } R_{eq}=\frac{2e}{S(\lambda_2+\lambda_3)}$$

$$\text{D'où : }\Phi=\frac{T_{p_1}-T_{p_2}}{\frac{e_1}{\lambda_1 S}+\frac{2e}{S(\lambda_2+\lambda_3)}+\frac{e_2}{\lambda_4 S}}=\frac{370-66}{\frac{0.035}{175\times0.1}+\frac{2\times0.075}{0.1(35+80)}+\frac{0.05}{60\times0.1}}=13004.339\text{ W}$$

Exercice 06 : Calculer le flux de chaleur à travers le mur composite illustré ci-dessous :



λ_1 = 180 W/m.K, λ_2 = 45 W/m.K,
λ_3 = 90 W/m.K, λ_4 = 60 W/m.K,
λ_5 = 120W/m.K, λ_6 = 165W/m.K,
$S_2 = S_3 = S_4 = S_5$
$S_1 = S_6$



Solution : Le flux thermique traversant le mur est donné par : $\Phi=\frac{T_{p_1}-T_{p_2}}{\sum R_{th}}=\frac{T_{p_1}-T_{p_2}}{R_1+R_{eq}+R_2}$

Calculons alors les différentes résistances :

$$R_1=\frac{e_1}{\lambda_1 S}=\frac{0.1}{180(0.5\times0.1)}=0.0111°C/W;\ R_2=\frac{e_2}{\lambda_2\left(\frac{S}{2}\right)}=\frac{0.2}{45\left(\frac{0.5\times0.1}{2}\right)}=0.177°C/W$$

$$R_3=\frac{e_3}{\lambda_3\left(\frac{S}{2}\right)}=\frac{0.2}{90\left(\frac{0.5\times0.1}{2}\right)}=0.088\ °C/W;\ R_4=\frac{e_4}{\lambda_4\left(\frac{S}{2}\right)}=\frac{0.2}{60\left(\frac{0.5\times0.1}{2}\right)}=0.13\ °C/W$$

$$R_5=\frac{e_5}{\lambda_5\left(\frac{S}{2}\right)}=\frac{0.1}{120\left(\frac{0.5\times0.1}{2}\right)}=0.066\ °C/W;\ R_6=\frac{e_6}{\lambda_6 S}=\frac{0.1}{165(0.5\times0.1)}=0.012\ °C/W$$

La résistance équivalente peut se calculer par : $\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}\Rightarrow R_{eq}=\frac{R_A\times R_B}{R_A+R_B}$

Avec $R_A = R_2 + R_4$ et $R_B = R_3 + R_5$ d'où $R_{eq}=\frac{(R_2+R_4)\times(R_3+R_5)}{R_2+R_4+R_3+R_5}=0.1036\ °C/W$

En définitif, le flux thermique qui traverse le mur est : $\Phi = 14389.07$ W

Exercice 07 : Calculer le flux traversant la façade de 50 m² d'une maison. Le mur est constitué de briques de 26 cm d'épaisseur. La façade est percée de 4 vitres de 2 m² de surface et 3.5 mm d'épaisseur et d'une porte en bois de 2 m² et de 42 mm d'épaisseur. On suppose que la température de la paroi interne est égale à 10 °C pour tous les matériaux constituant la façade, de même, la température de la paroi externe est de 5 °C.

Conductivité thermique du verre : $\lambda_v = 0.7\ W.m^{-1}.K^{-1}$
Conductivité thermique des briques : $\lambda_b = 0.52\ W.m^{-1}.K^{-1}$
Conductivité thermique du bois : $\lambda_{bois} = 0.21\ W.m^{-1}.K^{-1}$

Solution : La façade peut être assimilée à 3 résistances en parallèle, celle des vitres, celle de la porte et celle du mur de briques. On calcule donc chacune de ces résistances pour en déduire la résistance équivalente et finalement calculer le flux traversant la façade.

- Résistance thermique des vitres : $R_{vitres} = \frac{e_{vitre}}{\lambda_v S_{vitres}} = \frac{3.5\times10^{-3}}{0.7\times4.2} = 0.625\times10^{-3}\ °C/W$
- Résistance thermique de la porte : $R_{porte} = \frac{e_{porte}}{\lambda_{bois} S_{porte}} = \frac{0.042}{0.21\times2} = 0.1\ °C/W$
- Résistance thermique du mur : $R_{mur} = \frac{e_{mur}}{\lambda_b S_{mur}} = \frac{0.26}{0.52(50-4.2-2)} = 0.0125\ °C/W$
- Résistance équivalente de la façade :

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{1}{R_{vitres}} + \frac{1}{R_{porte}} + \frac{1}{R_{mur}}\right) = \left(\frac{1}{0.625\times10^{-3}} + \frac{1}{0.1} + \frac{1}{0.0125}\right) = 1690\ °C/W \ ;\ R = \frac{1}{1690} = 0.592\times10^{-3}\ °C/W$$

Donc le flux traversant la façade est : $\Phi_{façade} = \frac{(T_1 - T_2)}{R} = 8450\ W$

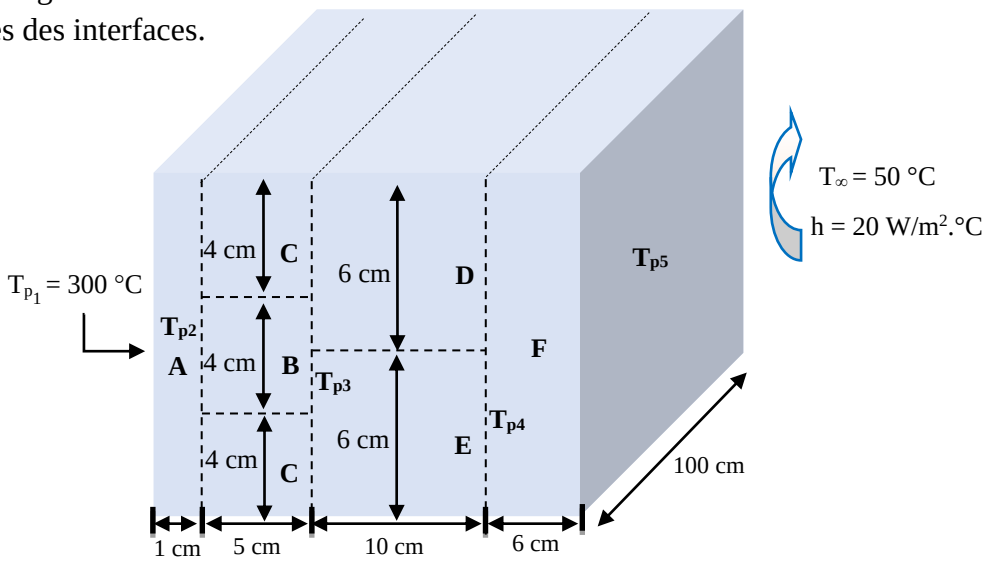
On peut aussi calculer le flux traversant les vitres, la porte et le mur et additionner ces flux soit :

- ✓ Flux traversant les vitres : $\Phi_{vitres} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{vitres}} = \frac{10-5}{0.625\times10^{-3}} = 8000\ W$
- ✓ Flux traversant la porte : $\Phi_{porte} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{porte}} = \frac{10-5}{0.1} = 50\ W$
- ✓ Flux traversant le mur : $\Phi_{mur} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{mur}} = \frac{10-5}{0.0125} = 400\ W$

Le flux total traversant la façade est : $\Phi_{façade} = \Phi_{vitres} + \Phi_{porte} + \Phi_{mur} = 8000 + 50 + 400 = 8450\ W$

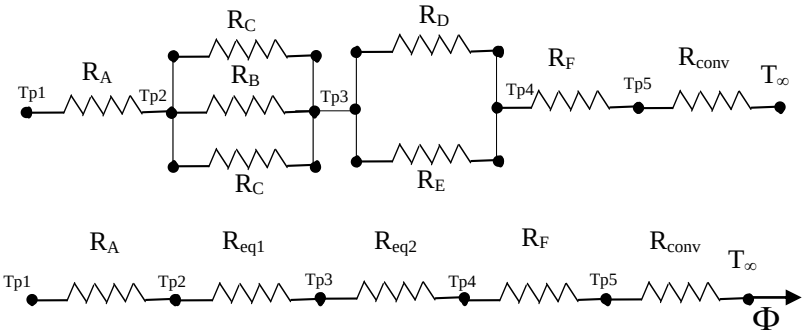
Exercice 08 : Considérons un mur de 5 m de hauteur, 8 m de longueur et 0.22 m d'épaisseur**.** La conductivité thermique des différents matériaux utilisés est : $\lambda_A = \lambda_F = 2$, $\lambda_B = 8$, $\lambda_C = 20$, $\lambda_D = 15$, et $\lambda_E = 35$ W/m.K. La figure ci-dessous illustre une coupe transversale représentative d'une partie du mur. La surface gauche de la paroi est maintenue à une température uniforme de 300 °C. tandis que la surface droite est exposée à l'air dont la température et le coefficient d'échange convectif sont respectivement 50 °C avec 20 W/m^2.K.

1. Tracer le schéma électrique équivalent.
2. Calculer le flux de chaleur global à travers le mur.
3. Calculer les températures des interfaces.



Solution :

1. Le schéma électrique équivalent du système est donné ci-dessous :



2. Calcul du flux thermique traversant le mur :

La section transversale d'une partie représentative du mur est : $S_1 = 1\times 0.12 = 0.12\,m^2$

Surface de la section B et C : $S_2 = 1\times 0.04 = 0.04\,m^2$

Surface de la section B et D : $S_3 = 1\times 0.06 = 0.06\,m^2$

La surface totale du mur est : $S_{totale} = 5m\times 8m = 40\,m^2$

Les résistances thermiques individuelles sont donc :

$$R_A = \frac{e_A}{\lambda_A S_1} = \frac{0.01}{2\times 0.12} = 0.04167\,K/W \qquad R_B = \frac{e_B}{\lambda_B S_2} = \frac{0.05}{8\times 0.04} = 0.15625\,K/W$$

$$R_C = \frac{e_C}{\lambda_C S_2} = \frac{0.05}{20\times 0.04} = 0.0625\,K/W \qquad R_D = \frac{e_D}{\lambda_D S_3} = \frac{0.1}{15\times 0.06} = 0.111\,K/W$$

$$R_E = \frac{e_E}{\lambda_E S_3} = \frac{0.1}{35\times 0.06} = 0.0467\,K/W \qquad R_F = \frac{e_F}{\lambda_F S_1} = \frac{1}{20\times 0.12} = 0.25\,K/W$$

$$R_{conv} = \frac{1}{hS_1} = \frac{1}{20\times 0.12} = 0.4167\,K/W$$

Comme le montre le réseau thermique, les résistances R_B et R_C sont parallèles :

$$\frac{1}{R_{eq_1}} = \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} = \frac{1}{0.0625} + \frac{1}{0.15625} + \frac{1}{0.0625} = 38.4 \Rightarrow R_{eq_1} = \frac{1}{38.4} = 0.0260\,K/W$$

De même, les résistances R_D et R_D sont parallèles, leurs résistances équivalentes sont :

$$\frac{1}{R_{eq_2}} = \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_E} = \frac{1}{0.111} + \frac{1}{0.0476} = 30.017 \Rightarrow R_{eq_2} = \frac{1}{30.017} = 0.0333\,K/W$$

La résistance globale est égale à la somme des résistances en série R_A, R_{eq1}, R_{eq2}, R_F et R_{conv} :

$$\sum R_{th} = R_A + R_{eq_1} + R_{eq_2} + R_F + R_{conv} = 0.04167 + 0.0260 + 0.0333 + 0.25 + 0.4167 = 0.767\,K/W$$

Par conséquent, le flux thermique du mur est donc : $\Phi = \frac{T_{p_1} - T_\infty}{\sum R_{th}} = \frac{300-50}{0.7677} = 325.65\,W$

On peut calculer aussi le flux thermique de la surface totale du mur, soit:

$$\Phi \times \frac{\text{Surface du mur}}{\text{Surface representative}} = \Phi \times \frac{S_{totale}}{S_1} = 325.65 \times \frac{40}{0.12} = 108.55\times 10^3\,W = 108.55\,kW$$

3. Calcul des températures des interfaces : Le flux étant conservatif, nous pouvons écrire aux bornes des chaque résistance :

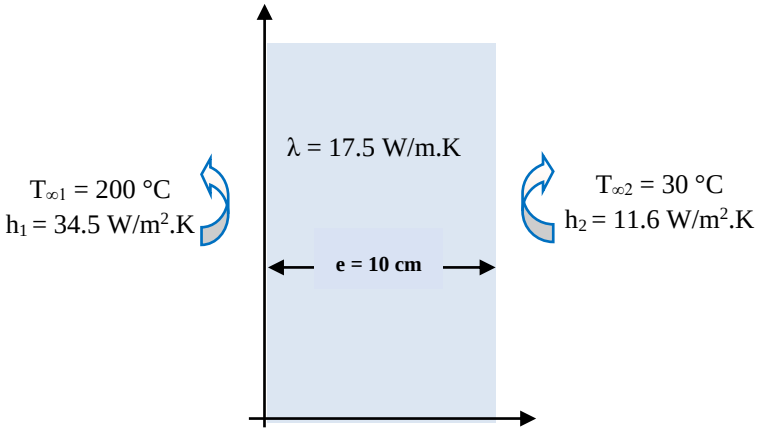
$$\Phi = \frac{T_{p_1} - T_{p_2}}{R_A} \Rightarrow T_{p_2} = T_{p_1} - \Phi \times R_A = 300 - 325.65 \times 0.04167 = 286.43°C$$

$$\Phi = \frac{T_{p_2} - T_{p_3}}{R_{eq1}} \Rightarrow T_{p_3} = T_{p_2} - \Phi \times R_{eq1} = 286.43 - 325.65 \times 0.0260 = 279.963°C$$

$$\Phi = \frac{T_{p_3} - T_{p_4}}{R_{eq2}} \Rightarrow T_{p_4} = T_{p_3} - \Phi \times R_{eq2} = 279.963 - 325.65 \times 0.0333 = 269.118°C$$

$$\Phi = \frac{T_{p_4} - T_{p_5}}{R_F} \Rightarrow T_{p_5} = T_{p_4} - \Phi \times R_F = 269.118 - 325.65 \times 0.25 = 187.705°C$$

Exercice 09 : Déterminer le profil de température dans le mur simple schématisé ci-dessous :



Solution : Il s'agit d'un problème avec des conditions aux limites de troisième type (flux convectif) pour les deux côtés. Dans ce cas on doit appliquer la conservation des flux aux frontières, soit :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} = 0 \rightarrow T(x) = Ax + B \\ x = 0 : \text{flux convectif} = \text{flux conductif} \\ x = e : \text{flux conductif} = \text{flux convectif} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} = 0 \rightarrow T(x) = Ax + B \\ x = 0 : h_1 S\left(T_{\infty 1} - T_{p_1}\right) = -\lambda S\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=0} \\ x = e : -\lambda S\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=e} = h_2 S\left(T_{p_2} - T_{\infty 2}\right) \end{cases}$$

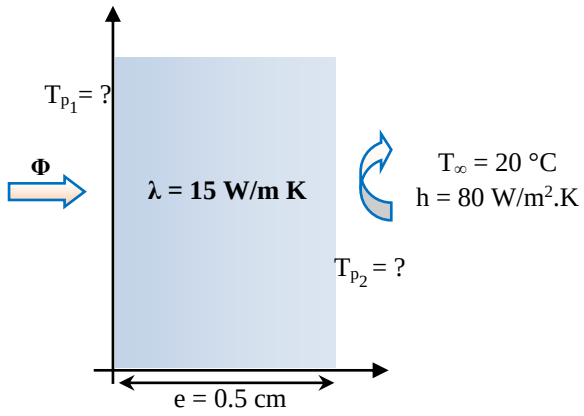
Avec $\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=e} = A$; $T_{p_1} = T(0) = B$; $T_{p_2} = T(e) = A \times e + B$

On en déduit alors les constantes d'intégration A et B, soit : $\begin{cases} h_1\left(T_{\infty 1} - B\right) = -\lambda A \\ -\lambda A = h_2\left[\left(Ae + B\right) - T_{\infty 2}\right] \end{cases}$

D'où $A = -80.345\ °C/m$, $B = 159.24\ °C$ et $T(x) = -80.345x + 159.24$

Exercice 10 : On considère une plaque de base d'un fer à repasser de 1200 W. La plaque a une épaisseur e = 0.5 cm, une surface de S = 300 cm^2 et une conductivité λ = 15 W/m.K K. Comme le montre la figure ci-dessous la plaque peut être assimilée à un mur plan dont la surface interne est soumise à un flux thermique uniforme généré par les résistances intérieures, et la surface extérieure perd de la chaleur par convection dans l'environnement à T = 20 °C. En prenant le coefficient de transfert de chaleur par convection h = 80 W/m^2.K et en négligeant les pertes de

chaleur par rayonnement, déterminer le profil de température dans la plaque et évaluer les températures des deux surfaces interne et externe.



Solution : Il s'agit d'un mur avec conditions aux limites de troisième type (flux convectif) côté droite et du deuxième type (Newman) côté gauche. On applique toujours la conservation de flux aux deux frontières, le modèle mathématique gouvernant est le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} = 0 \rightarrow T(x) = Ax + B \\ \\ x = 0 : \text{densité de flux constante} = \text{flux conductif} \\ x = e : \text{flux conductif} = \text{flux convectif} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} = 0 : T(x) = Ax + B \\ \\ x = 0 : \Phi = -\lambda S\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=0} \\ \\ x = e \rightarrow -\lambda S\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=e} = hS\left(T_{p_2} - T_\infty\right) \end{cases}$$

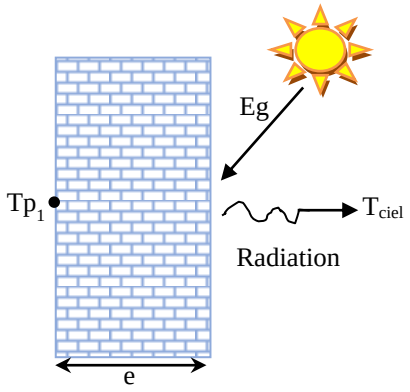
$$\begin{cases} x = 0 : \dfrac{\Phi}{S} = -\lambda A \\ x = e : -\lambda A = h\left(T_{p_2} - T_\infty\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{\varphi}{\lambda} \\ -\lambda A = h\left[(Ae + B) - T_\infty\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{\varphi}{\lambda} \\ B = T_\infty - \dfrac{\varphi}{h} + \dfrac{\varphi}{\lambda}e \end{cases}$$

Dans ces conditions, le profil de température s'écrit alors : $T(x) = T_\infty + \varphi\left(\dfrac{e-x}{\lambda} + \dfrac{1}{h}\right)$

D'où, les températures des faces sont : T(0) = 533 °C et T(e) = 520 °C

Exercice 11 : On considère un mur simple plan d'épaisseur e = 0.06 m et de conductivité thermique λ = 1.2 W/m.°C. Le mur est revêtu de porcelaine dont l'émissivité et l'absorptivité sont respectivement 0.85 et 0.26. La surface interne est maintenue à T_{p_1} = 300 K tandis que la surface extérieure est exposée à un éclairement solaire Eg = 800 W/m². La surface extérieure perd de la chaleur par rayonnement dans l'espace à la température T_{ciel} = 0 K.

Déterminer la température de la surface extérieure ainsi que le flux thermique traversant le mur. Que peut-on constater si l'éclairement solaire est nul



Solution : Il s'agit d'un mur avec conditions aux limites de troisième type (radiatif) côté droite et du premier type (Dirichlet) côté gauche. Le flux radiatif en fait constitue une condition aux limites ***non-linéaire***. La conservation de flux permet d'écrire le modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} = 0 \rightarrow T(x) = Ax + B \\ x = 0 : T(0) = T_{p_1} = B \\ x = e : -\lambda\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_e = \varepsilon\sigma\left[T^4(e) - T_{ciel}^4\right] - \alpha E_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 : T(0) = B = T_{p_1} = 300\ K \\ x = e : -\lambda A = \varepsilon\sigma T_{p_2}^4 - \alpha E_G \end{cases}$$

La seule inconnue est la constante A, cependant l'équation est non linéaire et donc nous ne pouvons pas obtenir une expression pour la température. A cet effet on inverse le raisonnement c'est-à-dire on détermine la température T_{p_2} ensuite la constante A :

$$A = \frac{\alpha E_G - \varepsilon\sigma T_{p_2}^4}{\lambda}, \quad \text{d'où :} \quad T(x) = \frac{\alpha E_G - \varepsilon\sigma T_{p_2}^4}{\lambda} x + T_{p_1}^4$$

En remplace pour x = e, on obtient une équation non-linéaire dont l'inconnue est T_{p_2}, soit :

$$T_{p_2} = \frac{0.26\times 800 - 0.85\times 5.67\times 10^{-8}\times T_{p_2}^4}{1,2}\times 0.06 + 300\text{, ou encore } T_{p_2} = 310.4 - 0.240575\left(\frac{T_{p_2}}{100}\right)^4$$

La résolution numérique utilisant la méthode de Newton-Raphson donne : $T_{p_2} = 292.7$ K

On en déduit donc le profil : $T(x) = \dfrac{0.26\times 800 - 0.85\times 5.67\times 10^{-8}(292.7)^4}{1.2} x + 300$

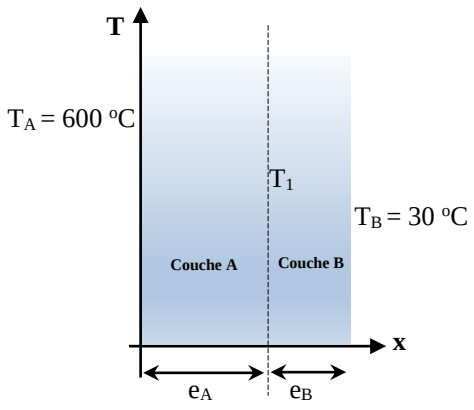
$$T(x) = -121.5x + 300$$

Le flux est donc : $\varphi = \lambda\dfrac{T_{p_1} - T_{p_2}}{e} = 1.2\dfrac{300 - 292.7}{0.06} = 146\ W/m^2$

Remarque : Dans le cas ou Eg = 0 → T_{p_2} = 284.3 K, on constante pour une même température interne T_{p_2} = 300 K, le rayonnement solaire implique une augmentation (presque 8 K) de la température de la surface externe.

Exercice 12 : Trouver le flux thermique à travers une paroi composite constituée de deux couches A et B d'épaisseur $e_A = 10\,cm$ $e_B = 5\,cm$ respectivement. La conductivité thermique des deux couches varie avec la température selon les fonctions suivantes :

$\lambda_A = 0.4(1 + 0.008T)$ & $\lambda_B = 0.5(1 + 0.001T)$.



Solution : La conductivité thermique peut être exprimée comme : $\lambda = \lambda_0(1+\alpha T)$. Selon la loi de Fourier, le flux de chaleur à travers le mur est donné par :

$$\varphi = -\lambda\frac{dT}{dx} \quad \text{ou} \quad \varphi dx = -\lambda_0(1+\alpha T)dT$$

Pour la couche A, en intégrant de x = 0 à 0.1 m et T = 600 ^{0}C à la température d'interface T_1 : $\varphi_A\int_0^{0.1}dx = -0.4\int_{600}^{T_1}(1+0.008T)dT$

Nous obtenons : $0.1\varphi_A = -0.4\left[(T_1-600)+0.008\times\frac{(T_1^2-600^2)}{2}\right]$

Ou : $\varphi_A = 4\times(600-T_1)\left[1+0.004(T_1+600)\right]$ (1)

De la même manière, pour la couche B, x = 0.10 à 0.15 et T = T_1 à 30 ^{0}C, soit

$$\varphi_B\int_{0.1}^{0.15}dx = -0.5\int_{T_1}^{30}(1+0.001T)dT$$

Ou : $0.05\varphi_B = -0.5\times\left[(30-T_1)+0,001\times\frac{(30^2-T_1^2)}{2}\right]$

$$\varphi_B = -10\times(30-T_1)\left[1+0.001(30+T_1)\right] \quad (2)$$

En régime permanent : $\varphi_A = \varphi_B$

$$4\times(600-T_1)\left[1+0.004(T_1+600)\right] = -10\times(30-T_1)\left[1+0.001(30+T_1)\right]$$

$$8160-4T_1-0.016T_1^2 = -304.5+10T_1+0.005T_1^2$$

Ou encore : $T_1^2+666.67T_1-403071.43=0$

La résolution donne : $T_1 = \frac{-666.67\pm\sqrt{(666.67)^2+4\times1\times403071.43}}{2\times1} = 383.7\ °C$

En remplaçant dans l'équation (1) ou (2), on obtient : $\varphi = 4.27\times10^3\ W/m^2$

Exercice 13 : Une surface plane doit être calorifugée de façon que les pertes de chaleur par unité de temps ne dépassent pas 450 W/m². La température sous la couche calorifugée est T_1 = 450°C ; la température de la surface extérieure de la couche calorifugée est T_2 = 50 °C. Calculer l'épaisseur du calorifugée si : λ = 0.09 + 0.0000874 T (T en °C).

Solution :

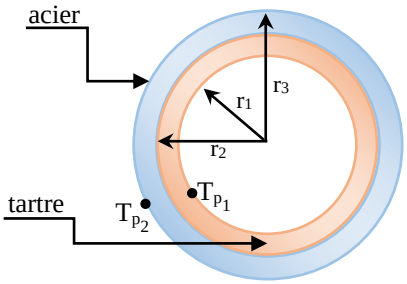
$$\varphi = -\lambda\frac{dT}{dx} \quad dx = -\frac{\lambda}{\varphi}dT \ ; \ \int_{x_1}^{x_2}dx = -\frac{1}{\varphi}\int_{T_1}^{T_2}\lambda(T)dT$$

$$(x_2-x_1) = -\frac{1}{\varphi}\int_{50}^{450}(0,09+0.000087T)dT = \frac{1}{450}\left(0.09+0.0000437T^2\right)_{50}^{450} = 100\,mm$$

Exercice 14 : L'intérieur du tube d'acier de diamètre 20/27 mm, dont la température de la paroi interne est T_{p_1} = 119.75 °C et celle de la paroi externe T_{p_2} = 119.64 °C, est entartré sur une épaisseur de 2 mm. On suppose que les températures intérieures et extérieures restent inchangées. Calculer :

1. La résistance thermique de la couche de tartre pour une longueur de 1 m.
2. La résistance équivalente du tube entartré.
3. Le flux thermique correspondant.

On donne : λ_{tartre} = 2.2 W/m.°C, λ_{acier} = 46 W/m.°C.



Solution :

1. Résistance thermique de la couche de tartre $R_{tartre\ par}$ unité de longueur est :

$$R_{tartre} = \frac{1}{\lambda_{tartre} 2\pi L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right);\ \text{Avec } r_1 = r_2 - \text{épaisseur du tartre}$$

$$R_{tartre} = \frac{1}{2.2\times 2\times \pi} \ln\left(\frac{10}{8}\right) = 1.614\times 10^{-2}\ °C/W$$

2. La résistance équivalente du tube entartré est la somme de la résistance de la couche de tartre et de la résistance du tube en acier calculée précédemment soit : $R_{totale} = R_{tube\ acier} + R_{tartre}$

$$R_{tube\ acier} = \frac{1}{\lambda_{acier} 2\pi L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{1}{46\times 2\times \pi} \ln\left(\frac{27/2}{20/2}\right) = 1.038\times 10^{-3}\ °C/W$$

$$R_{totale} = 1.038\times 10^{-3} + 1.614\times 10^{-2} = 1.718\times 10^{-2}\ °C/W$$

3. Le flux traversant le tube entartré est alors : $\Phi = \frac{T_{p_1} - T_{p_2}}{R_{totale}} = \frac{119.75 - 119.64}{1.718\times 10^{-2}} = 6.4\ W$

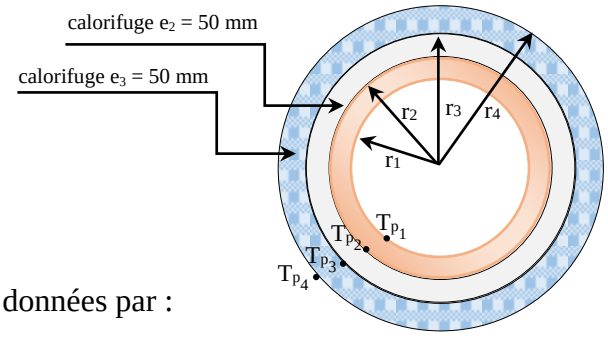
<u>Remarque</u> : La présence du tartre réduit le flux à 6 W alors qu'en absence de tartre il était de 106 W.

Exercice 15 : Un tube cylindrique en acier de diamètres d_1/d_2 = 100/120 mm et de conductivité thermique λ_1 = 50 W/m.°C est calorifugé de deux couches de même épaisseur $e_2 = e_3$ = 50 mm. La température de la surface intérieure du tube est T_{p_1} = 250 °C et la température de la surface extérieure du calorifuge T_{p_4} = 50 °C. Calculer les pertes de chaleur à travers le calorifugeage par unité de longueur du tube et la température à la surface de contact des couches calorifuges si le matériau de la première couche posée à la surface du tube est à coefficient de conductivité thermique λ_2 = 0.06 W/m.°C et celui de la deuxième couche λ_3 = 0.12 W/m.°C.

Solution

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{100}{120} \rightarrow \begin{cases} r_1 = 50 \\ r_2 = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_3 = r_2 + e_2 = 60 + 50 = 110\,mm \\ r_4 = r_2 + e_2 + e_3 = 60 + 50 + 50 = 160\,mm \\ r_4 = r_3 + e_3 = 160 + 50 = 210\,mm \end{cases}$$



Les pertes de chaleur par unité de longueur sont données par :

$$\varphi = \frac{\Phi}{L} = \frac{T_{p_1} - T_{p_4}}{\frac{1}{2\pi\lambda_1}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi\lambda_2}\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{2\pi\lambda_3}\ln\frac{r_4}{r_3}}$$ **<u>AN :</u>** $\varphi = 95.56\ W/m$

Etant donné que le flux est conservé, la température au contact des deux couche calorifuge peut être déterminé comme suit :

$$\varphi = \frac{T_{p_3} - T_{p_4}}{\frac{1}{2\pi\lambda_3}\ln\frac{r_4}{r_3}} \Rightarrow T_{p_3} = T_{p_4} + \varphi\left(\frac{1}{2\pi\lambda_3}\ln\frac{r_4}{r_3}\right)$$ **<u>AN :</u>** T_{p_3} = 96.87 °C

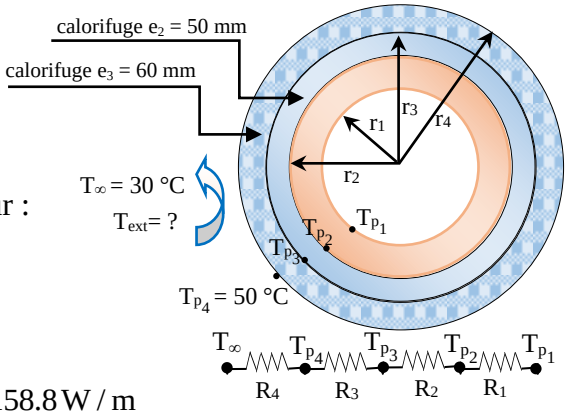
Exercice 16 : Une conduite cylindrique de 5 cm en acier (diamètre intérieur 53 mm, diamètre extérieur 60 mm, λ = 40.4 W/m.°C) transportant de la vapeur est calorifugée par 32 mm d'un revêtement fondu à haute température, composé de terre à diatomée et d'amiante (λ = 0.101 W/m.°C). Ce revêtement est isolé par 65 mm de feutre d'amiante feuilleté (λ = 0.072 W/m.°C). Au cours d'un essai, on a trouvé que la température du milieu environnant était de 30 °C, la température moyenne intérieure au tuyau dans lequel circule la vapeur était de 482 °C et la température de la surface extérieure du revêtement de 50 °C. On demande de calculer :

1. Les pertes de chaleur exprimées par unité de longueur de tuyau.
2. La température de la surface comprise entre les deux couches de calorifuge.
3. Le coefficient de transfert convectif h, à l'extérieur de la conduite, exprimé par unité de surface extérieure de revêtement

Solution : $r_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{53}{2} = 26.5\,\text{mm}$ **;** $r_2 = \frac{d_2}{2} = \frac{60}{20} = 30\,\text{mm}$

$r_3 = r_2 + e_2 \Rightarrow r_3 = 62\,\text{mm}$

$r_4 = r_3 + e_3 \Rightarrow r_4 = 127\,\text{mm}$



1. Calcul des pertes de chaleur (flux) par unité de longueur :

$$\varphi = \frac{\Phi}{L} = \frac{T_{p_1} - T_{p_4}}{\frac{1}{2\pi\lambda_1}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi\lambda_2}\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{2\pi\lambda_3}\ln\frac{r_4}{r_3}}$$

$$\varphi = \frac{482 - 50}{\frac{1}{2\pi\times 40.4}\ln\frac{60}{53} + \frac{1}{2\pi\times 0.101}\ln\frac{62}{60} + \frac{1}{2\pi\times 0.072}\ln\frac{127}{62}} = 158.8\,\text{W/m}$$

2. Calcul la température de contact entre les calorifugesT_{p3} : Etant donné que le flux thermique est conservé, la température de contact est donc :

$$\varphi = \frac{T_{p_3} - T_{p_4}}{\frac{1}{2\pi\lambda_3}\ln\frac{r_4}{r_3}} \Rightarrow T_{p_3} = 300.9\,°\text{C}$$

3. Calcul du coefficient de transfert convectif à l'extérieur h_{ext} :

$$\varphi = \frac{T_{p_4} - T_\infty}{\frac{1}{h_{ext}S_{ext}}} = \frac{T_{p_4} - T_\infty}{\frac{1}{h_{ext}2\pi r_4}} \Rightarrow \begin{cases} h_{ext} = \dfrac{\Phi}{2\pi r_4\left(T_{p_4} - T_\infty\right)} \\ h_{ext} = 9.917\,\text{W/m}^{20}\text{C} \end{cases}$$

Exercice 17 : Un cylindre creux (d_i = 5 cm ; d_e = 10 cm et λ = 70 W/m.K), les surfaces interne et externe sont respectivement à T_i = 200 °C et T_e = 100 °C

1. Calculer les pertes thermiques par unité de longueur (L = 1 m).
2. Calculer la température T_m au milieu de la couche.

Solution

1. Perte thermique par 1 m de longueur

$$\varphi = \frac{\Phi}{L} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_e}{r_i}} = \frac{2\pi\lambda\left(T_i - T_e\right)}{\ln\frac{r_e}{r_i}} \quad \underline{\textbf{A.N :}} \quad \varphi = \frac{6.28\times 70\left(200 - 100\right)}{\ln\frac{5}{2.5}} = 63.42\ \text{W/m}$$

2. Température T_m au milieu de la couche : au milieu, le rayon vaut : $r_m = \frac{(5+2.5)}{2} = 3.75\,\text{cm}$ et

$\varphi = 2\pi\lambda \frac{(T_i - T_e)}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} = 2\pi\lambda \frac{(T_i - T_m)}{\ln\left(\frac{r_m}{r_i}\right)}$ on en déduit : $(T_i - T_m) = (T_i - T_e)\frac{\ln\left(\frac{r_m}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} = (T_i - T_e)\ln\left(\frac{r_m}{r_e}\right)$;

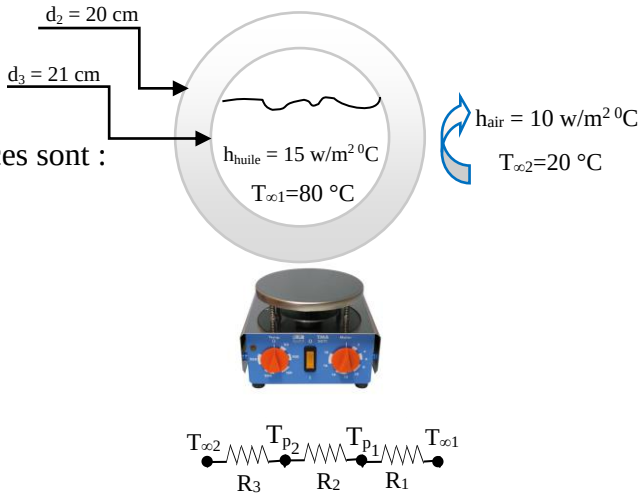
A.N : $T_m = 141.5$ °C

Exercice 18 : Un ballon contenant une huile moteur est soumis à une source de chaleur. Le ballon en verre (λ = 0.80 W/m.°C) est assimilé à une sphère dont les diamètres intérieur et extérieur sont respectivement égaux à 20 cm et 21 cm. L'huile et l'air environnant possèdent des coefficients de convection respectivement égaux à 15 W/m².°C et 10 W/m².°C. Déterminer le flux thermique que doit fournir la source de chaleur afin de garder la température de l'huile constante à 80 °C. On prendra la température ambiante égale à 20 °C.

Solution

$d_2 = 21\,\text{cm} \rightarrow r_2 = 10.5\,\text{cm}$

$d_1 = 20\,\text{cm} \rightarrow r_1 = 10\,\text{cm}$



Le ballon est assimilé à une sphère creuse, les résistances sont :

$$R_1 = \frac{1}{h_{huile} S_{int}} = \frac{1}{h_{huile} 4\pi r_1^2} = 0.530\ °C/W$$

$$R_2 = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 0.7\ °C/W$$

$$R_3 = \frac{1}{h_{air} S_{ext}} = \frac{1}{h_{air} 4\pi r_2^2} = 0.520\ °C/W$$

D'où le flux de chaleur : $\Phi = \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{\sum R_{th}} \Rightarrow \Phi = 46\,W$

Exercice 19 : On considère une sphère creuse de rayons R_1 et R_2. On demande de déterminer les expressions T (r) et φ (r) respectivement, le profil de température et la densité de flux si :

- Les températures sont imposées sur les deux faces.
- La température est imposée sur une face et la densité de flux sur l'autre.

Solution : Déterminons d'abord le profil de température. Pour une symétrie sphérique, l'équation de la chaleur se simplifie et s'écrit : $\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$. Multiplions les deux membres de l'équation par « r² » soit : $r^2\frac{d^2T}{dr^2} + 2r\frac{dT}{dr} = 0$ c'est-à-dire : $\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dT}{dr}\right] = 0$

Le terme entre crochets ne peut être que constant : $r^2\frac{dT}{dr} = A$

D'où : $T = -\frac{A}{r} + B$ et $\varphi = -\lambda\frac{dT}{dr} = \frac{A\lambda}{r^2}$

- Les températures sont imposées sur les deux faces, soient :

$T = T_1$ si $r = R_1$, ceci permet d'écrire : $T_1 = -\frac{A}{R_1} + B$

$T = T_2$ si $r = R_2$ $\quad T_2 = -\dfrac{A}{R_2} + B$

D'où : $A = (T_2 - T_1)\dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ et $B = \dfrac{T_2 R_2 - T_1 R_1}{R_2 - R_1}$

On trouve finalement :

$$T = \lambda(T_1 - T_2)\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\frac{1}{r} + \frac{T_2 R_2 - T_1 R_1}{R_2 - R_1}$$

Et : $\varphi = \lambda(T_1 - T_2)\dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\dfrac{1}{r^2}$

Les isothermes sont des surfaces de sphères concentriques et la température varie selon une branche hyperbolique.

- La température est imposée sur une face et la densité de flux sur l'autre :

Soient : $T = T_1$ si $r = R_1$ ce qui permet d'écrire : $T_1 = -\dfrac{A}{R_1} + B$

$\varphi = \varphi_2$ si $r = R_2$ $\quad \varphi_2 = -\dfrac{A\lambda}{R_2^2}$

D'où : $A = -\dfrac{R_2^2 \varphi_2}{\lambda}$ et $B = T_1 - \dfrac{R_2^2 \varphi_2}{R_1 \lambda}$

On obtient : $T = T_1 + \dfrac{R_2^2 \varphi_2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_1}\right)$ et $\varphi = \varphi_2 \dfrac{R_2^2}{r^2}$

Exercice 20 : Une paroi plane de 120 mm d'épaisseur et de conductivité de 200 W/m.K est le siège d'une génération interne de la chaleur dans de l'ordre 10^6 W/m^3. Déterminer la température aux centres et au plan médian et si la surfaces des deux côtés sont exposée à un flux convectif dont la température et le coefficient d'échange par convection sont respectivement $T_\infty = 30$ °C et h = 500 W/m^2.K. Trouver également le flux de chaleur et les gradients de température correspondants.

Solution : Calculons d'abord la température de la surface externe de la paroi :

$$T_p = T_\infty + \frac{PL}{h} = 30 + \frac{10^6 \times 0.06}{500} = 150\,°C$$

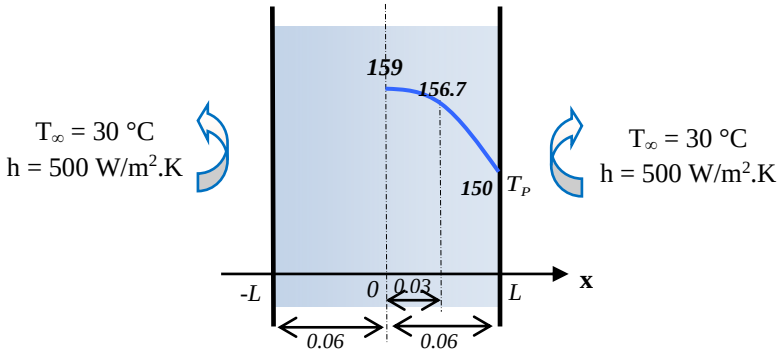
Les températures au centre (x=0) et au plan médian (x=L/2) de la paroi sont déterminées facilement à l'aide du profil de température : $T(x) = \dfrac{PL^2}{2\lambda}\left(1 - \dfrac{x^2}{L^2}\right) + T_p$, d'ou

- au centre $T(0) = T_{max} = \dfrac{10^6 \times (0.06)^2}{2 \times 200} + 150 = 159\,°C$
- au plan médian $T(0.03) = T_{max} = \dfrac{10^6 \times (0.06)^2}{2 \times 200}\left(1 - \dfrac{0.03^2}{0.06^2}\right) + 150 = 156.75°C$

Les flux de chaleur par unité de surface et les gradients correspondants sont :

- à x=0 : $\Phi = SPL = 1 \times 10^6 \times 0 = 30000$ W/m^2 ; $\quad \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \left(-\dfrac{Px}{\lambda}\right) = 0$
- à x=0.03 : $\Phi = SPL = 1 \times 10^6 \times 0.03 = 30000$ W/m^2 ; $\quad \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0.03} = \left(-\dfrac{Px}{\lambda}\right) = -150\,°C/m$

- à x=0.06 : $\Phi = SPL = 1\times10^6\times0.06 = 60000\ Wm^{-2}$; $\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0.06} = \left(-\dfrac{Px}{\lambda}\right) = -300\,°C/m$



Exercice 21 : Si les températures des surfaces de ***l'exercice 20*** sont dans maintenues à 130 °C et 150 °C sur les surfaces externes, déterminer la position et la valeur de la température maximale. Trouvez également le flux de chaleur total et la température au niveau du plan central.

Solution : $x_{max} = \dfrac{\lambda}{2PL}\left(T_{p_2} - T_{p_1}\right) = \dfrac{200}{2\times10^6\times0.06}(150-130) = 0.0333\,m$, et la température maximale donnée par :

$$T_{max} = \frac{PL^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{8PL^2}\left(T_{p_2} - T_{p_1}\right)^2 + \frac{T_{p_2}+T_{p_1}}{2} = \frac{10^6\times0.06^2}{2\times200} + \frac{200}{8\times10^6\times0.06^2}(150-130)^2 + \frac{150+130}{2} = 151.778\ °C$$

Calcul de flux de chaleur total : il est égal à la somme des flux thermique de chaque surface :

- à 130 °C $\Phi = S\times P\times0.09333 = 1\times10^6\times0.09333 = 93333.3\ W/m^2$
- à 150 °C $\Phi = S\times P\times(0.06-0.0333) = 1\times10^6\times(0.06-0.0333) = 26666.7\ W/m^2$

D'où, le flux total $\Phi_{total} = 120000\ W$

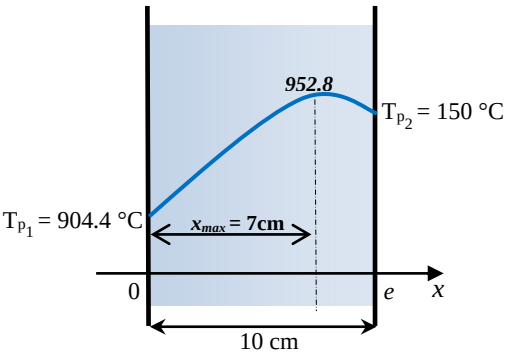
La température au centre est donnée par :

$$T(0) = \frac{PL^2}{2\lambda}\left(1-\frac{0^2}{L^2}\right) + \frac{T_{p_2}-T_{p_1}}{2}\frac{0}{L} + \frac{T_{p_2}+T_{p_1}}{2} = 149\ °C$$

Exercice 22 : Une plaque de grandes dimensions et d'épaisseur 10 cm est le siège d'un échauffement interne d'intensité P = 34.9×10⁴ W/m³. La conductivité thermique de la plaque est de 17.5 W/m.K. D'un côté, les gaz qui la lèchent sont à 200 °C et le coefficient de transfert de chaleur est de 34.5 W/m².K. De l'autre, les gaz sont à 30 °C et le coefficient convectif n'est que de 11.6 W/m².K. Établir le profil de température dans la plaque.

Solution : Le profil de température dans la plaque s'écrit :

$$T(x) = -\frac{P}{2\lambda}x^2 + Ax + B,\ \text{et}\ \frac{dT}{dx} = -\frac{P}{\lambda}x + A$$



Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions aux limites, on a donc :

$$\begin{cases} x=0, & h_1\left(T_{\infty1}-T_{p_1}\right) = -\lambda\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=0} \\ x=e, & -\lambda.\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=e} = h_2\left(T_{p_2}-T_{\infty2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1\left(T_{\infty1}-T_{p_1}\right) = -\lambda\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=0} \\ -\lambda.\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=e} = h_2\left(T_{p_2}-T_{\infty2}\right) \end{cases}$$

Avec $T_{p_1} = T(0) = B$ et $T_{p_2} = T_{p_2} = T(e) = -\dfrac{P}{2\lambda}e^2 + Ae + B$, ce qui conduit finalement à :

$$\begin{cases} h_1\left(T_{\infty 1}-B\right)=-\lambda A \\ -\lambda.\left(-\dfrac{P}{\lambda}e+A\right)=h_2\left(-\dfrac{P}{2\lambda}e^2+Ae+B-T_{\infty 2}\right) \end{cases} \Rightarrow A=\frac{T_{\infty 2}-T_{\infty 1}+Pe\left(\dfrac{1}{h_2}+\dfrac{e}{2\lambda}\right)}{e+\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}};\ B=T_{\infty 1}+\frac{\lambda A}{h_1}$$

A.N : $A=1388.7\,°C/m\,;B=904.4\,°C$, le profil est donc : $T(x)=-9971.4x^2+1388.7x+904.4$

Exercice 23 : Soit un cylindre ayant un diamètre extérieur de 2.5 cm et une conductivité thermique de 31.9 W/m.°C dans lequel la chaleur est engendrée selon l'équation : $P=P_0\left[1-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right]$. P_0 est la quantité de chaleur engendrée par unité de volume en un point situé à la distance r du centre, R est le rayon du cylindre. La quantité de chaleur totale quittant la surface est uniforme et vaut 1.58×10^6 W/m^2. Calculer la chute de température existant entre le centre et la surface.

Solution : $\varphi_T=1.58\times10^6\ W/m^2$, $\lambda=31.9\ W/m.K$, $R=\dfrac{2.5}{2}$ mm

L'équation de la chaleur avec source : $\nabla^2T=-\dfrac{P}{\lambda}$

$$\Rightarrow\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=-\frac{P_0}{\lambda}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\Rightarrow\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=-\frac{P_0\,r}{\lambda}+\frac{P_0r^3}{\lambda R^2}$$ on intègre deux fois :

$$\frac{dT}{dr}=-\frac{P_0\,r}{2\lambda}+\frac{P_0r^3}{4\lambda R^2}+\frac{C_1}{r}\quad\text{qui donne}\quad T(r)=-\frac{P_0\,r^2}{4\lambda}+\frac{P_0r^4}{16\lambda R^2}+C_1\ln(r)+C_2$$

Les constantes d'intégrations C_1 et C_2 sont obtenues à l'aide des conditions aux limites, soit:

- Pour r = 0 : $\dfrac{dT}{dr}=0\ \Rightarrow C_1=0$ et $C_2=T(0)=T_0$

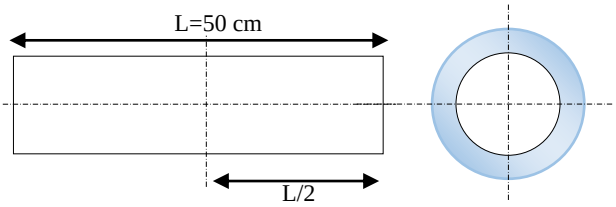
On cherche en fait : $\Delta T=T(R)-T(0)=T_R-T_0$, donc : $\Delta T=-\dfrac{P_0R^2}{4\lambda}+\dfrac{P_0R^4}{16\lambda R^2}=-\left(\dfrac{3P_0R^2}{16\lambda}\right)$

- Pour r = R : $-\lambda\left(\dfrac{dT}{dr}\right)=\varphi_T\Rightarrow-\lambda\left(-\dfrac{P_0R}{2\lambda}+\dfrac{P_0R^3}{4\lambda R^2}\right)=\varphi_T\Rightarrow\varphi_T=\dfrac{P_0R}{4}\Rightarrow P_0=\dfrac{4\varphi_T}{R}$

Finalement : $\Delta T=-\left(\dfrac{3R\varphi_T}{4\lambda}\right)$; **AN :** $\Delta T=\dfrac{-3\times0.025\times1.58\times10^6}{2\times4\times31.9}=-464.34\ °C$

Exercice 24 : Un tuyau en cuivre (longueur = 50 cm, diamètre extérieur = 2.5 cm, épaisseur de la paroi = 2 mm) est bien isolé thermiquement et ses extrémités sont à 0°C. Un courant électrique traverse le tuyau et débite un flux de 20 W. Déterminer le profil de température le long du tuyau et calculer la température au milieu du barreau (λ = 384 W/m.°C).

Solution



D_e = 2.5 cm

e_i = 2 mm; T_0 = 0 °C

Φ = 20 W.

La symétrie par rapport au milieu de la barre conduit à :

$$\frac{d^2T}{dx^2}=-\frac{P}{\lambda}\Rightarrow\frac{d^2T}{dx^2}=-\frac{P}{\lambda}x+A\rightarrow T(x)=-\frac{P}{2\lambda}x^2+Ax+B$$

Ou la source interne P peut se calculer par : $P=\frac{\Phi}{v}=\frac{\Phi}{\frac{\pi D^2}{4}L}$ avec $D_i = D_e - 2e_p$,

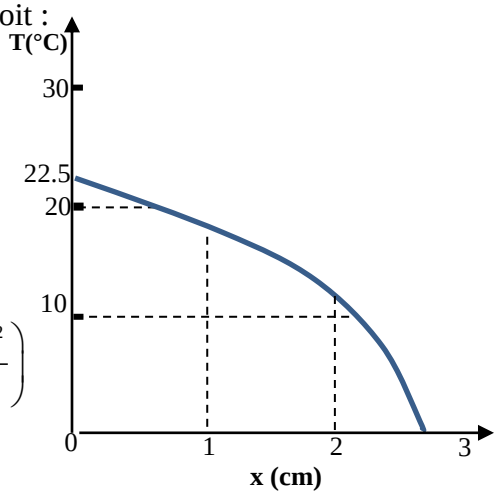
D'où : $P=\frac{4\Phi}{\pi\left[D_e^2-(D_e-2ep)^2\right]L}$ **A.N :** P = 276.8 KW/m^3. Ainsi, les constantes d'intégration A et B peuvent être évaluées à l'aide des conditions aux frontières, soit :

$$\begin{cases} x=0 : \frac{dT}{dx}=0\rightarrow A=0 \\ x=\frac{L}{2} : T\left(\frac{L}{2}\right)=T_0=-\frac{P}{2\lambda}\left(\frac{L}{2}\right)^2+e_2\Rightarrow e_2=T_0+\frac{P}{2\lambda}\left(\frac{L}{2}\right)^2 \end{cases}$$

D'où, le profil vérifié donc l'équation : $T(x)=T_0+\frac{P}{2\lambda}\left(\frac{L^2}{4}-x^2\right)$

On en déduit la température au milieu : $T_{milieu}=T(0)=T_0+\frac{P}{2\lambda}\left(\frac{L^2}{4}\right)$

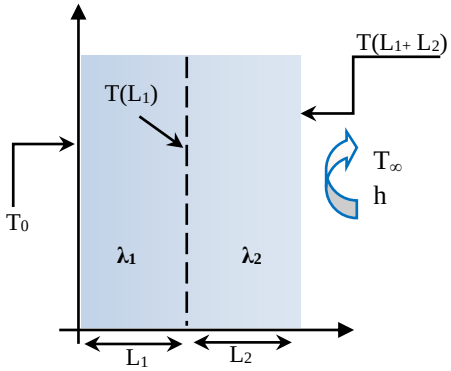
A.N : $T_{milieu}=22.5\ °C$



Exercice 25 : Une paroi composée de deux milieux homogènes de conductivité thermique λ_1 et λ_2 et d'épaisseur L_1 et L_2 respectivement, dont les conditions aux limites sont les suivantes :

1. Trouver la distribution de la température ainsi que le flux de chaleur pour les deux milieux, si la première paroi est le siège d'une génération interne de chaleur d'intensité P = 50 W/cm^2.
2. Représenter graphiquement le profil de la température ainsi que le flux de chaleur des deux milieux.

On donne : λ_1 = 0.8 W/cm.°C, λ_2 = 0.2 W/cm.°C, h = 0.5 W/cm^2 °C, T_0 = 600 °C, T_∞ = 200 °C, L_1 = 4 cm, L_2 = 3 cm, S = 1 cm^2 (aire transversale).



Solution

1. La distribution de la température ainsi que le flux de chaleur pour les deux milieux.

Milieu 1 :

$$\lambda_1\frac{d^2T_1}{dx^2}+P=0\Rightarrow T_1(x)=-\frac{P}{2\lambda_1}x^2+a\,x+b\Rightarrow\varphi_1(x)=-\lambda_1\frac{dT_1}{dx}\Rightarrow\varphi_1(x)=P\,x-a\lambda_1$$

Milieu 2 : $\frac{d^2T_2}{dx^2}=0\Rightarrow T_2(x)=c\,x+d\Rightarrow\varphi_2(x)=-\lambda_2\frac{dT_2}{dx}\Rightarrow\varphi_2(x)=-\lambda_2 c$

Il y a 4 constantes d'intégrations à identifier : a, b, c et d, donc il faut 4 conditions aux limites :

1- $x=0\Rightarrow T_1(x=0)=T_0=b$

2- $x=L_1\Rightarrow T_1(L_1)=T_2(L_1)\Rightarrow(a-c)L_1-d=-\frac{P}{2\lambda_1}L_1^2-T_0$ continuité de température.

3- $x=L_1\Rightarrow\varphi_1(L_1)=\varphi_2(L_1)\Rightarrow qP\,L_1-a\,\lambda_1=-\lambda_2 c$ égalité de flux de chaleur.

4- $x=L_1+L_2\Rightarrow-\lambda_2\left.\frac{dT_2}{dx}\right|_{L1+L2}=h\left[T_2(L_1+L_2)-T_\infty\right]\Rightarrow-\lambda_2 c=h\left[T_2(L_1+L_2)-T_\infty\right]$

Sous forme d'équation : ***sous forme matricielle :***

$$\begin{cases} b = T_0 = 600\,°C \\ 4a - ac - d = -100 \\ 0.8a - 0.2c = 200 \\ 7.4c + d = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c - \frac{1}{4}d = -25 \\ 0.8a - 0.2c = 200 \\ 7.4c + d = 200 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/4 \\ 0.8 & -0.2 & 0 \\ 0 & 7.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Pour la résolution du système d'équations linéaire [A][B]=[C] , on utilise la méthode de CRAMER : Calculons d'abord de déterminant det[A] : det[A] = - 0.88

Par conséquent, les inconnus a, b et c sont déterminés comme suit :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -25 & -1 & -1/4 \\ 200 & -0.2 & 0 \\ 200 & 7.4 & 1 \end{vmatrix}}{\det[A]} = 198.66, \quad c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -25 & -1/4 \\ 0.8 & 200 & 0 \\ 0 & 200 & 1 \end{vmatrix}}{\det[A]} = -204.55 \text{ et } d = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -25 \\ 0.8 & -0.2 & 200 \\ 0 & 7.4 & 200 \end{vmatrix}}{\det[A]} = 1713.63$$

On également utiliser l'une des méthodes numériques directes ou itératives

D'où la distribution de la température et le flux de chaleur pour chaque milieu :

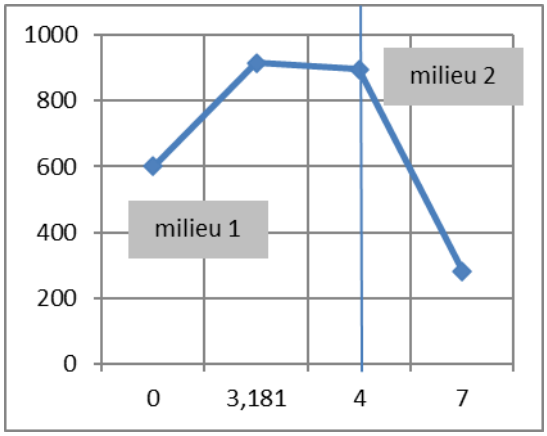
$$\begin{cases} T_1(x) = -31.25\,x^2 + 198.86\,x + 600 \ (°C) \\ T_2(x) = -204.55\,x + 1713.63 \ (°C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = Px - a\lambda_1 = 50\,x - 159.09\,(W/cm^2) \\ \varphi_2(x) = -c\lambda_2 = 40.91 \ (W/cm^2) \end{cases}$$

2. Représentation graphique :

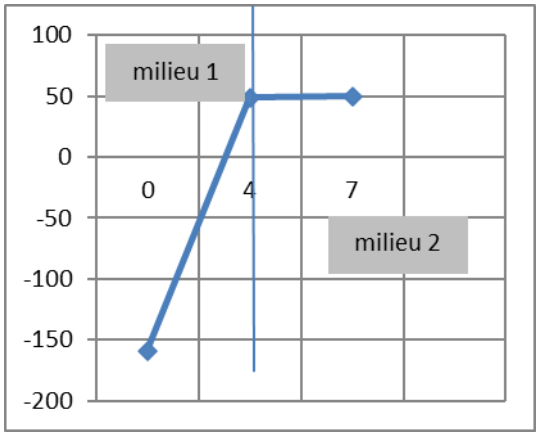
Température **flux de chaleur**

$$\begin{cases} T_1(x=0) = 600\ °C \\ T_1(x=L_1) = T_2(x=L_1) = 895.45\,°C \\ T_{paroi} = T_2(L_1+L_2) = T_2(x=7) = 281.8\,°C \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_1(x=0) = -159.09\ W/cm^2 \\ \varphi_1(x=L_1) = \varphi_2(x=L_1) = 49.9\ W/cm^2 \\ \varphi_2(L_1+L_2) = h\left[T_2(L_1+L_2) - T_\infty\right] = 49.9\ W/cm^2 \end{cases}$$

$$\frac{dT_1}{dx} = 0 \Rightarrow x_{max} = 3.181 \text{ cm et } T_{1max} = T_1(x_{max}) = 916.36\ °C$$



Profil de température



Profil de flux

2.1. Introduction

Quand le transfert thermique entre une surface et un fluide est faible par exemple, dans le cas de la paroi chaude d'un moteur léché par de l'air froid, on peut penser à augmenter le transfert de chaleur par convection mais la question qui se pose : ***comment peut-on le faire ?***

Il existe trois solutions techniques à savoir :

- ✓ Augmenter la différence de température ($T_p - T_\infty$) en diminuant la température du fluide T_∞ ;
- ✓ Augmenter le coefficient de transmission de chaleur convectif h : ce qui peut se faire en élevant la vitesse car h est relié à la vitesse du fluide par exemple utiliser des ventilateurs ;
- ✓ Augmenter la surface d'échange en utilisant des surfaces auxiliaires appelées ***ailettes*** attachées à la paroi en question.

Il n'est évidemment pas possible d'augmenter la différence de température car réduire la température du fluide « T_∞ » est bien souvent infaisable dans l'installation. Pour augmenter le coefficient de convection, nous verrons au chapitre 4 qu'il faut augmenter la vitesse de l'écoulement, ce qui n'est pas tellement pratique et bien souvent le cout est élevé (installation de pompes ou ventilateurs puissants et encombrants). En termes de cout et la facilité de mise en œuvre, l'augmentation de la surface d'échange entre le dispositif son milieu ambiant par le biais ailettes offrent la solution la plus privilégiée dans la plupart des cas.

2.2. Définition & intérêt des ailettes

Une ailette est un dispositif thermique visant à augmenter la surface de contact entre un solide et son milieu extérieur (fluide) dont le but est d'amplifier les échanges convectifs (voir figure 2.1).

Le transfert thermique entre l'ailette et le solide se fait par conduction, alors que les échanges avec le milieu extérieur ont lieu par convection. Les applications sont nombreuses, on peut citer : le refroidissement des microprocesseurs modernes, les radiateurs du système de chauffage central, les radiateurs d'automobiles, les échangeurs des installations frigorifiques (condenseurs et évaporateurs), etc.

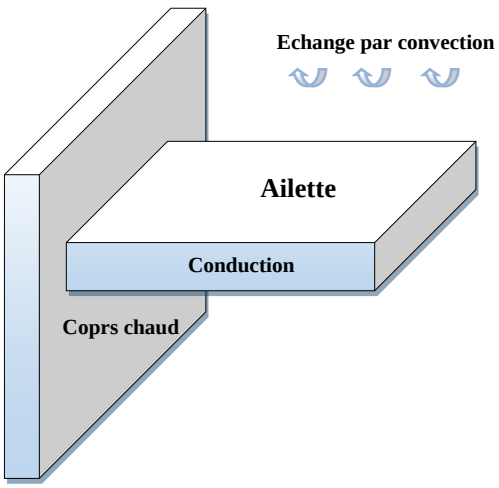


Figure 2.1: Schéma de l'ailette

2.2.1. Différents types d'ailettes

Les ailettes peuvent avoir de multiples formes et géométries selon les applications souhaitées. De même elles peuvent être attachées à la surface mère de différentes manières et être placées dans des milieux fluides de nature variables. On distingue généralement deux types d'ailettes : les ailettes rectangulaires, et les ailettes circulaires (voir figure 2.2).

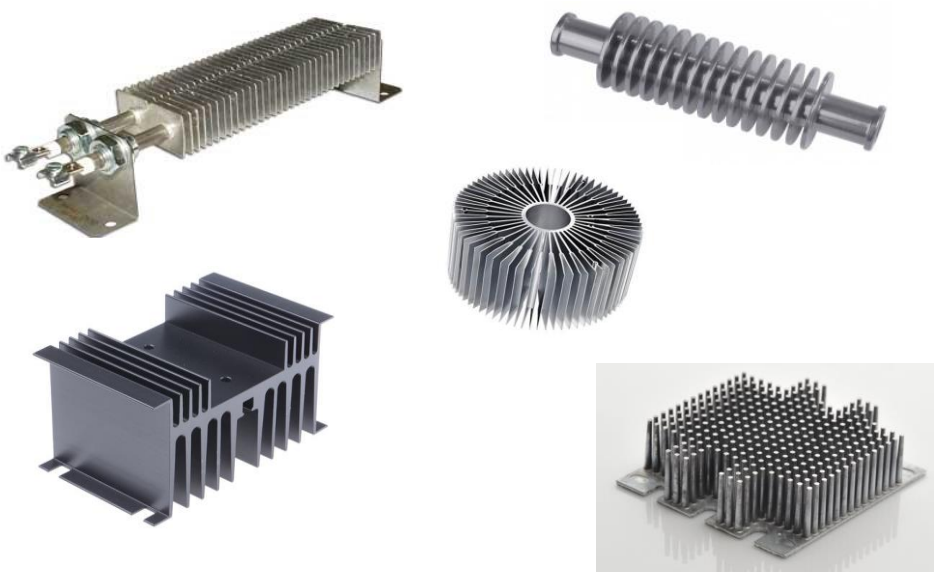


Figure 2.2 : Différents types d'ailettes

2.3. Modèle physique et équation générale

On considère une ailette de forme non uniforme d'axe Ox, de section variable S(x) et de périmètre P(x) qui varient en avec la longueur. L'ailette est constituée d'un matériau dont les caractéristiques thermophysiques sont (ρ, C_p, λ, a). A sa base (x = 0), l'ailette est en contact avec un solide de température T_B alors que son extrémité (x = L) est soumise à de différentes conditions aux frontières (voir figure 2.3). La température ambiante est maintenue à « T_∞ » et les échanges thermiques entre l'ailette et l'air ambiant se font par convection avec un coefficient d'échange « h ».

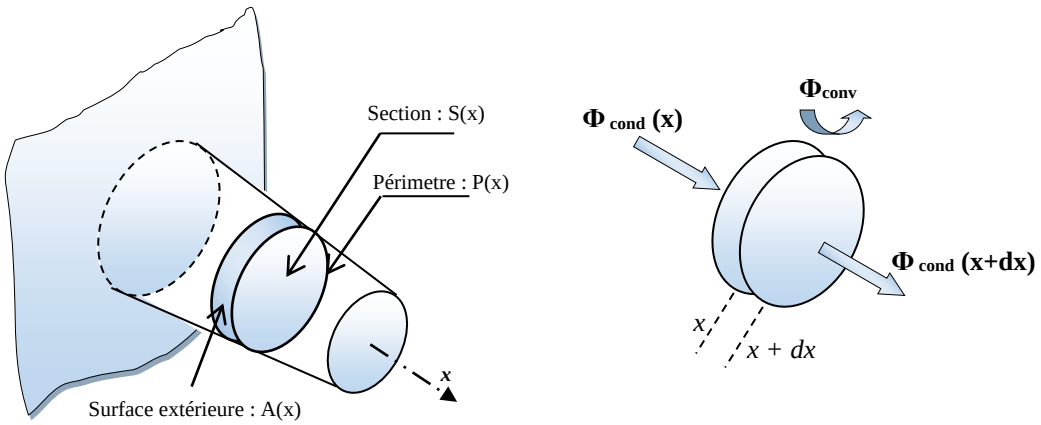


Figure 2.3: Modèle physique d'une ailette à section variable

2.3.1. Hypothèses simplificatrices

Avant de commencer l'étude des ailettes un certain nombre d'hypothèse sont établies dans le but de simplifier l'analyse :

- La première hypothèse est celle qui constitue à supposer que la longueur « L » de l'ailette est grande devant l'épaisseur, ce qui nous permet de considérer que la température est uniforme dans chaque section de l'ailette. Autrement dit, dans le cas longitudinal, la température ne dépend que de l'abscisse (prise selon la longueur) et le problème est à *une seule dimension.*
- Le régime est permanent et on néglige le transfert de chaleur par rayonnement.
- L'ailette est constituée d'un matériau isotrope (λ est constante) et passif (Il n'y a pas de génération de chaleur dans l'ailette).
- Le coefficient de transfert thermique « h » est uniforme tout le long de l'ailette.
- La température du fluide ambiant « T_∞ » est uniforme.
- Il n'y a pas de résistance de contact entre l'ailette et la paroi mère (l'ailette est en contact parfait avec le solide).
- L'écoulement de chaleur est monodimensionnel, c'est-à-dire que le flux de chaleur ne se propage que dans une seule direction (la direction x). On considère ainsi que la température est uniforme dans une section de l'ailette en *x* donné, ce qui est généralement assuré par l'utilisation d'ailettes fines.

2.3.2. Mise en équations

En appliquant le principe de conservation d'énergie (premier principe de la thermodynamique) sur un tronçon de largeur « dx » de l'ailette, son énergie interne « ΔU » reste invariable (régime stationnaire $\Delta U = 0$ et système indéformable $W = 0$), nous obtenons :

$$\Delta U = 0 = Q + W = \underbrace{\Phi_{cond}(x) - \Phi_{cond}(x+dx) - \Phi_{conv}}_{Q} + \underbrace{0}_{W=0} \tag{2.1}$$

Avec : $\Phi_{cond}(x)$ est le flux conductif en x

$\Phi_{cond}(x+dx)$ est flux conductif en x+dx

Φ_{conv} : est la perte convective en x et x+dx

$$\Phi_{cond}(x) - \Phi_{cond}(x+dx) - \Phi_{conv} = 0 \tag{2.2}$$

De la loi de Fourier, le flux conductif s'écrit :

$$\Phi_{cond}(x) = -\left(\lambda S(x)\frac{dT(x)}{dx}\right) \tag{2.3}$$

Et le développement en série Taylor donne :

$$\Phi_{cond}(x+dx) = \Phi_{cond}(x) + \frac{d\Phi_{cond}}{dx}dx \tag{2.4}$$

Avec : S est la section de l'ailette qui varie en fonction de « x ». Il s'ensuit :

$$\Phi_{cond}(x+dx) = -\left(\lambda S(x)\frac{dT(x)}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\lambda S(x)\frac{dT(x)}{dx}\right)dx \tag{2.5}$$

Le flux thermique échangé par convection s'exprime grâce à la relation suivante :

$$\Phi_{conv} = hdA\left(T(x) - T_\infty\right) \tag{2.6}$$

Avec : dA est la surface externe de l'élément

En injectant les relations des flux thermiques dans l'équation de bilan (2.2) et en réarrangeant, on obtient :

$$\frac{d}{dx}\left(S(x)\frac{dT(x)}{dx}\right)-\frac{hdA}{\lambda dx}\left(T(x)-T_\infty\right)=0 \qquad (2.7)$$

Expression que l'on peut écrire :

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2}+\left(\frac{1}{S(x)}\frac{dS(x)}{dx}\right)\frac{dT(x)}{dx}-\frac{1}{S(x)}\frac{hdA}{\lambda dx}\left(T(x)-T_\infty\right)=0 \qquad (2.8)$$

Afin de simplifier la solution de cette équation, on pose : $\theta(x)=T(x)-T_\infty$, la dérivée première et seconde de la température par rapport à « x » sont :

$$T(x)=\theta(x)+T_\infty,\ \frac{dT(x)}{dx}=\frac{d\theta(x)}{dx}\ \text{et}\ \frac{d^2T(x)}{dx^2}=\frac{d^2\theta(x)}{dx^2}$$

Finalement, l'équation (2.8) devient alors :

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2}+\left(\frac{1}{S(x)}\frac{dS(x)}{dx}\right)\frac{d\theta(x)}{dx}-\frac{1}{S(x)}\frac{hdA}{\lambda dx}\theta(x)=0 \qquad (2.9)$$

2.3.3. Ailette à section uniforme

La configuration géométrique la plus simple est l'ailette droite rectangulaire et l'ailette épingle dont la section transversale reste uniforme (constante) sur toute la longueur (voir figure 2.3), cela implique que $\frac{dS}{dx}=0$, l'équation (2.9) se réduit à :

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2}-\frac{hP}{\lambda S}\theta(x)=0 \qquad (2.10)$$

Avec : dA = Pdx (P est le périmètre de l'ailette).

- Pour une ailette rectangulaire d'épaisseur « e » et de largeur « l » : S = e l ; P = 2(e + l)
- Pour une ailette cylindrique de rayon « R » : S =π R^2 ; p = 2πR

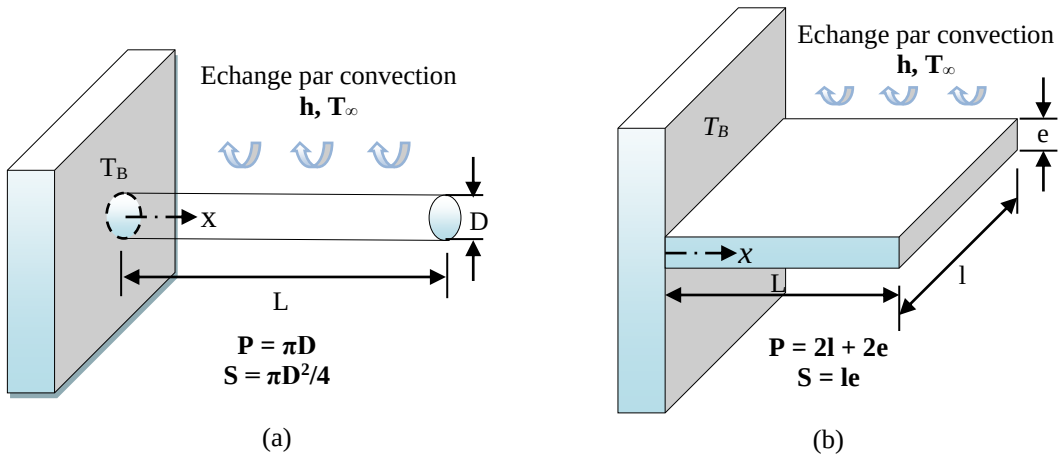


Figure 2.3: Modèle physique de l'ailette
(a) : ailette circulaire, (b) : ailette rectangulaire

On définit le paramètre de l'ailette : $n^2 = \frac{hP}{\lambda S}$, l'équation de l'ailette s'écrit alors :

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - n^2\theta(x) = 0 \qquad (2.11)$$

C'est une équation différentielle du second ordre linéaire et homogène à coefficients constants admet une solution générale de la forme :

$$\begin{cases} \theta(x) = C_1 \exp(nx) + C_2 \exp(-nx) \\ \text{ou : } \theta(x) = C_1 chnx + C_2 shnx \end{cases} \qquad (2.12)$$

Les constantes d'intégration sont évaluées en utilisant les conditions aux limites à la base (x = 0) et à l'extrémité de l'ailette (x = L). La température de la base sur laquelle les ailettes sont fixées est normalement connue à l'avance égale à « T_B » tandis qu'à l'extrémité (section terminale dite aussi bout de l'ailette ou extrémité de l'ailette), plusieurs possibilités peuvent être envisagées :

2.3.3.1. Ailette infinie

Dans le cas d'une ailette très longue ($L \to \infty$), on admet l'hypothèse : $T(x = L) = T_\infty$.

Les conditions aux limites s'écrivent alors : $\begin{cases} x = 0 : \theta(0) = T(0) - T_\infty = T_B - T_\infty \\ x = L = \infty : \theta(\infty) = T(\infty) - T_\infty = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \theta(0) = T_B - T_\infty = C_1 + C_2 \\ \theta(\infty) = 0 = C_1 \exp(n\infty) + nC_2 \exp(-n\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = T_B - T_\infty \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

D'où, la variation de température à pour expression :

$$\frac{\theta(x)}{\theta(0)} = \frac{T(x) - T_\infty}{T_B - T_\infty} = \exp(-nx) \qquad (2.13)$$

La température le long de l'ailette décroît exponentiellement de « T_B » à « T_∞ » (voir figure 2.4). Le flux dissipé sur toute la surface de l'ailette peut être calculé par intégration du flux convectif local, soit :

$$\Phi_{ailette} = \int_0^\infty hP(T_B - T_\infty)dx = n\lambda S(T_B - T_\infty) \qquad (2.14)$$

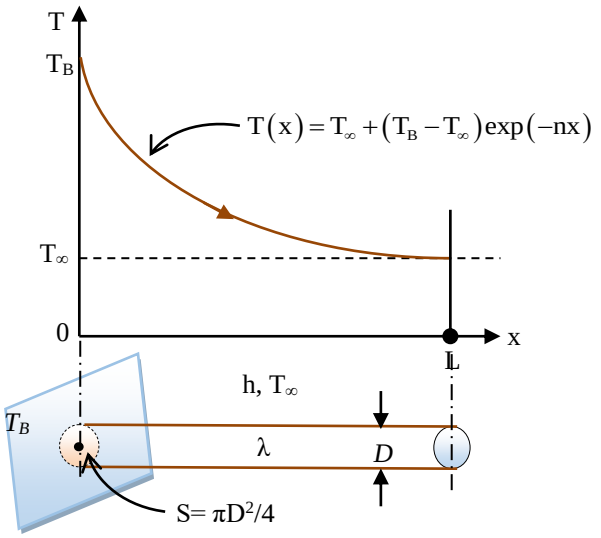


Figure 2.4 : Variation de température le long de l'ailette infinie

Ou plus facilement en remarquant que dans le cas du régime permanent, c'est le même que celui transmis par conduction à la base (à x=0) de l'ailette soit :

$$\Phi_{ailette} = -\lambda S\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = -\lambda S\left(T_B - T_\infty\right)(-n)\exp(-nx)$$

D'où : $$\Phi_{ailette} = \sqrt{hP\lambda S}\left(T_B - T_\infty\right) \qquad (2.15)$$

2.3.3.2. Ailette dont l'extrémité est adiabatique

La solution générale obtenue est identique au cas précèdent, ce sont les conditions aux limites qui différent :

$$\begin{cases} x = 0 :\ \theta(0) = T(0) - T_\infty = T_B - T_\infty = C_1 + C_2 \\ x = L : -\lambda S\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=L} = 0 = nC_1e^{nL} - nC_2e^{-nL} \ \text{(conservation de flux)} \end{cases}$$

La résolution du système à deux équations nous donne :

$$C_1 = \theta(0)\left(\frac{e^{-nL}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right) \qquad \text{et} \qquad C_2 = \theta(0)\left(\frac{e^{nL}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right)$$

En remplaçant les deux constantes dans l'équation (1.7), on obtient :

$$\theta(x) = \left(\left[\frac{\theta(0)e^{-nL}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right]e^{nx} + \left[\frac{\theta(0)e^{nL}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right]e^{-nx}\right)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta(0)} = \left(\frac{e^{-n(L-x)}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right) + \left(\frac{e^{n(L-x)}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta(0)} = \left(\frac{e^{-n(L-x)}+e^{n(L-x)}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right)$$

$$sh = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad ch = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

En utilisant la définition du cosinus hyperbolique, on obtient finalement :

$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_B-T_\infty} = \frac{ch\left[n(L-x)\right]}{ch(nL)} \qquad (2.16)$$

Dans ce cas l'ailette dissipera un flux :

$$\Phi_{ailette} = -\lambda S\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \lambda Sn\left(T_B - T_\infty\right)\frac{sh(nl)}{ch(nL)}$$

Soit encore : $$\Phi_{ailette} = \sqrt{hP\lambda S}\left(T_B - T_\infty\right)th(nL) \qquad (2.17)$$

2.3.3.3. Ailette dont l'extrémité est soumise à un flux convectif

Dans cette configuration, les conditions aux limites s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} x = 0 :\ \theta(0) = T(0) - T_\infty = T_B - T_\infty \\ x = L : -\lambda S\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=L} = hS\left[T(L) - T_\infty\right] \ \text{(conservation de flux)} \end{cases}$$

Aboutissant finalement : $$\frac{T(x)-T_\infty}{T_B-T_\infty} = \frac{ch\left[n(L-x)\right] + \left(\frac{h}{\lambda n}\right)sh\left[n(L-x)\right]}{ch(nL) + \left(\frac{h}{\lambda n}\right)sh(nL)} \qquad (2.18)$$

D'autre part, le flux dissipé par l'ailette à pour expression :

$$\Phi_{ailette} = -\lambda S\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = n\lambda S\left(T_B - T_\infty\right)\frac{sh\left(nL\right)+\frac{h}{\lambda n}ch\left(nl\right)}{ch\left(nl\right)+\left(\frac{h}{\lambda n}\right)sh\left(nL\right)} \tag{2.19}$$

En réarrangeant cette dernière expression, le flux dissipé s'écrit alors :

$$\Phi_{ailette} = \sqrt{hP\lambda S}\left(T_B - T_\infty\right)\frac{th\left(nL\right)+\frac{h}{\lambda n}}{1+\left(\frac{h}{\lambda n}\right)th\left(nL\right)} \tag{2.20}$$

2.3.3.4. Ailette dont la température à l'extrémité est connue

Dans cette configuration, les conditions aux limites s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} x = 0 :\ \theta(0) = T(0) - T_\infty = T_B - T_\infty \\ x = L : \theta(L) = T(L) - T_\infty = T_A - T_\infty \end{cases}$$

De la même manière, nous pouvons obtenir la distribution de la température et le flux thermique. Les relations qui en résultent ont pour expressions :

$$\frac{T\left(x\right)-T_\infty}{T_B - T_\infty} = \frac{\frac{\theta\left(L\right)}{\theta\left(0\right)}sh\left(nx\right)+sh\left[n\left(L-x\right)\right]}{sh\left(nL\right)} \tag{2.21}$$

$$\Phi_{ailette} = \sqrt{hP\lambda S}\left(T_B - T_\infty\right)\frac{ch\left(nL\right)-\frac{\theta\left(L\right)}{\theta\left(0\right)}}{sh\left(nL\right)} \tag{2.22}$$

2.4. Performances thermiques des ailettes

2.4.1. Efficacité d'une ailette (effectiveness en anglais)

L'efficacité d'une ailette est définie comme étant le rapport entre le flux de chaleur dissipé par l'ailette et le flux de chaleur qui quitte la même section s'il n'y avait pas d'ailette et si la température de base reste identique, soit :

$$\varepsilon_{ailette} = \frac{\Phi_{ailette}}{hS\left(T_B - T_\infty\right)} \tag{2.23}$$

On peut constater :

1- Une efficacité $\varepsilon_{ailette}$=1 indique que l'utilisation des ailettes à la surface n'affecte pas du tout le taux de transfert de chaleur.

2- Une efficacité $\varepsilon_{ailette}$<1 indique que l'ailette agit comme isolant et diminue le taux de transfert de chaleur de la surface. Ceci peut se produire si des ailettes de matériaux à faible conductivité thermique sont utilisées.

3- Une efficacité $\varepsilon_{ailette}$>1 indique que les ailettes augmentent le taux de transfert de chaleur.

Cas particulier de l'ailette infinie

$$\varepsilon_{ailette} = \frac{\Phi_{ailette}}{hS\left(T_B - T_\infty\right)} = \frac{\sqrt{hP\lambda S}\left(T_B - T_\infty\right)}{hS\left(T_B - T_\infty\right)} = \left(\frac{\lambda P}{hS}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.24}$$

A partir de cette dernière expression et pour des raisons de conception et de sélection des ailettes, nous pouvons tirer plusieurs conclusions importantes :

- La conductivité thermique « λ » de l'ailette doit être aussi élevée que possible. Il n'est donc pas un hasard si les ailettes sont fabriquées à partir de métaux, avec le cuivre, l'aluminium et ses alliages et le fer par exemple. Les ailettes les plus couramment utilisés sont en aluminium en raison de son faible coût et poids et sa résistance à la corrosion.
- Le rapport « P/S » doit être aussi élevée que possible. Ce critère est satisfait par l'utilisation des ailettes minces (Des ailettes étroites et rapprochées sont meilleures que des ailettes épaisses et espacées).
- L'utilisation des ailettes est plus efficace dans les applications impliquant un coefficient de transfert de chaleur convectif plus faible. Ainsi, l'utilisation des ailettes est plus facilement justifiée lorsque le milieu est un gaz plutôt que dans le cas d'un liquide et le transfert de chaleur se produit par convection naturelle. Par conséquent, les ailettes sont utilisées sur le côté gaz dans les échangeurs thermiques (radiateur automobile par exemple).

Le choix des ailettes est alors un compromis entre le coût, l'encombrement, les pertes de charge et le transfert de chaleur.

2.4.2. Rendement d'une ailette (efficiency en anglais)

Nous avons montré que, la convection autour de la surface d'ailette provoque une chute graduelle de la température le long de cette dernière. Dans le cas limite, la conductivité thermique tend vers l'infini ($\lambda \to \infty$), et la résistance thermique de conduction devient nulle cela veut dire que l'écart de température entre l'ailette et le fluide environnant est maximal et par conséquent il n'y a pas de chute de température dans l'ailette c'est-à-dire, la température le long de l'ailette entière sera uniforme est égale à la température de base « T_B ». Dans ces conditions, le flux thermique échangé par une ailette idéale peut s'exprimer selon la relation :

$$\Phi_{idéal} = hS_a\left(T_B - T_\infty\right) \tag{2.25}$$

Avec, S_a : la surface totale de l'ailette (surface d'échange entre l'ailette et le fluide environnant). Pour une ailette à section uniforme, nous pouvons écrire : $S_a = S_{latérale} + S$

Remarque : Généralement, $S \langle\langle S_{latérale}$, d'où $S_a = S_{latérale} = PL$

Une autre mesure de la performance thermique d'une ailette est fournie par le calcul d'un autre paramètre appelé ***rendement d'ailette***. Le rendement de l'ailette est défini comme le rapport du flux de chaleur dissipé par l'ailette au flux de chaleur qui aura lieu si toute la surface de l'ailette est à la température de base.

$$\eta_{ailette} = \frac{\Phi_{ailette}}{\Phi_{idéal}} \qquad 0 \le \eta_{ailette} \le 1 \tag{2.26}$$

Le flux échangé par cette ailette idéale serait : $\Phi_{idéal} = hPL\left(T_B - T_\infty\right)$

Si l'efficacité est connue, le flux thermique à dissiper par l'ailette est donné par :

$$\Phi_{ailette} = \eta_{ailette}.\Phi_{idéal} = \eta_{ailette} hS_a\left(T_B - T_\infty\right) = \eta_{ailette} hPL\left(T_B - T_\infty\right) \tag{2.27}$$

Nous en déduisons les rendements des configurations déjà définies comme suit :

- Ailette rectangulaire longue ($L \to \infty$) :

$$\eta_{ailette} = \frac{1}{nL} \tag{2.28}$$

- Ailette rectangulaire isolée (adiabatique) à l'extrémité :

$$\eta_{ailette} = \frac{\sqrt{hP\lambda S}\left(T_B - T_\infty\right)th\left(nL\right)}{hPL\left(T_B - T_\infty\right)} = \frac{th\left(nL\right)}{nL} \tag{2.29}$$

- Ailette rectangulaire avec transfert de chaleur à l'extrémité :

$$\eta_{ailette} = \frac{th\left(nL\right) + \dfrac{h}{\lambda n}}{nL + \left(\dfrac{hL}{\lambda}\right)th\left(nL\right)} \tag{2.30}$$

Dans le cas de géométries plus complexes (ailettes à section variable, ailettes aiguilles…), il existe des expressions analytiques et des abaques permettant de déterminer l'efficacité des ailettes et ensuite le flux de chaleur « $\Phi_{ailette}$ » extrait par l'ailette grâce à la relation :

$$\Phi_{ailette} = \eta_{ailette}\Phi_{idéal} \tag{2.31}$$

2.4.3. Efficacité & Rendement des surfaces ailettes

Soit une surface munie d'un certain nombre d'ailettes identiques, soit : « S_s » la surface d'échange sans ailettes (entre ailettes), « S_a » la surface d'échange d'une seule ailette, « S_p » la surface primaire et « S_{totale} » la surface d'échange totale. Le flux thermique total pour une surface comportant « N » ailettes a pour expression :

$$\begin{aligned}\Phi_{total} &= N\Phi_{ailettes} + \Phi_{sans\,ailettes} = N\varepsilon_{ailette}hS\left(T_B - T_\infty\right) + hS_s\left(T_B - T_\infty\right)\\ &= N\varepsilon_{ailette}hS\left(T_B - T_\infty\right) + h\left(S_p - NS\right)\left(T_B - T_\infty\right)\\ \Phi_{total} &= hS_p\left(T_B - T_\infty\right) + NhS\left(\varepsilon_{ailette} - 1\right)\left(T_B - T_\infty\right)\end{aligned} \tag{2.32}$$

L'efficacité globale est définie par : $\varepsilon_{globale} = \dfrac{\text{Flux thermique total}}{\text{Flux perdu par la surface primaire}}$

Ou encore : $$\varepsilon_{globale} = \frac{hS_p\left(T_B - T_\infty\right) + NhS\left(\varepsilon_{ailette} - 1\right)\left(T_B - T_\infty\right)}{hS_p\left(T_B - T_\infty\right)} = 1 + N\frac{S}{S_p}\left(\varepsilon_{ailette} - 1\right) \tag{2.33}$$

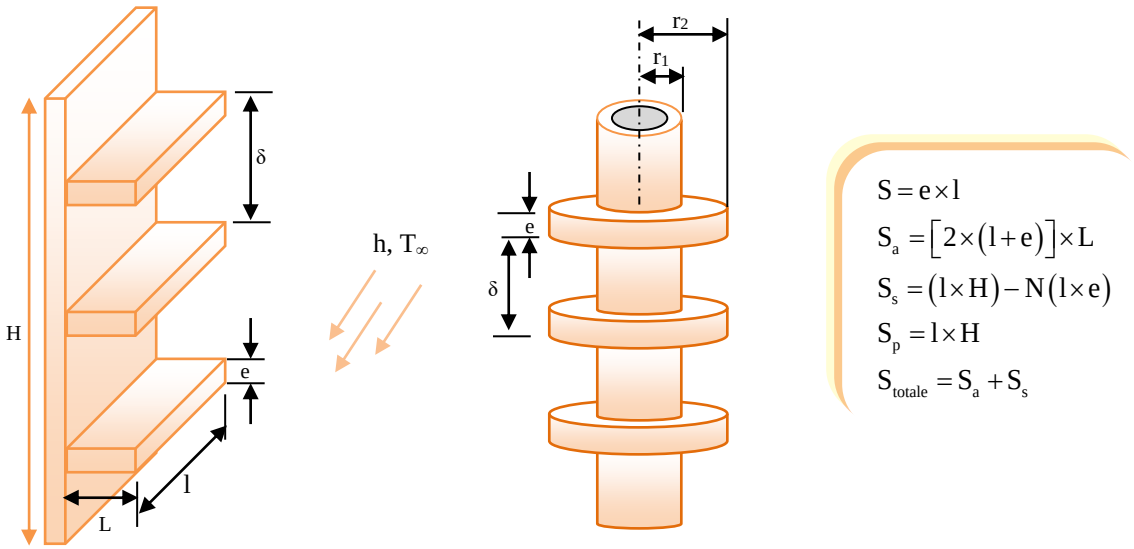


Figure 2.5 : Surface à ailettes

Nous pouvons également définir le rendement global de la surface à ailettes comme étant le rapport du flux thermique échangé par la surface d'échange totale au flux maximum que

pourrait échanger cette même surface si elle est à une température uniforme égale à la température de la base, soit :

$$\eta_{gobal} = \frac{N\Phi_{ailettes} + \Phi_{sans\,ailettes}}{hS_{totale}\left(T_B - T_\infty\right)}$$

$$= \frac{N\eta_{ailette}hS_a\left(T_B - T_\infty\right) + h\left(S_{totale} - NS_a\right)\left(T_B - T_\infty\right)}{hS_{totale}\left(T_B - T_\infty\right)}$$

Finalement : $$\eta_{gobal} = 1 - N\frac{S_a}{S_{totale}}\left(1 - \eta_{ailette}\right) \qquad (2.34)$$

2.5. Concept de la longueur d'ailette corrigée

Le profil de température pour le troisième cas (flux convectif au bout de l'ailette) représente le cas le plus proche de la réalité cependant il semble assez lourd à utiliser, et il est donc souhaitable d'avoir un moyen de simplifier l'évaluation de la température et les performances de l'ailette pour ce cas. Une telle méthode a été développée qui implique l'utilisation des résultats du deuxième cas (l'extrémité de l'ailette est adiabatique). Nous définissons une "***longueur d'ailette corrigée***" L_C, comme suit : $L_C = L + \delta$, ou δ est la longueur de frottement calculée par la relation :

$$\delta = \frac{S}{P}$$

En utilisant les relations appropriées pour *S* et *P*, les longueurs corrigées pour les ailettes rectangulaires et cylindriques sont facilement déterminées :

$$L_C = L + \frac{1}{2}e \;; \qquad L_C = L + \frac{1}{4}D$$

En remplaçant la longueur corrigée dans les équations du deuxième cas, on obtient un résultat traitent le troisième cas avec une erreur très faible. Si $\left(\frac{h}{\lambda n}\right) \leq \frac{1}{2}$, l'erreur maximale entre les deux solutions est inférieure à 8%. Cette méthode de modification de la longueur est connue sous le nom « ***longueur de l'ailette corrigée*** ».

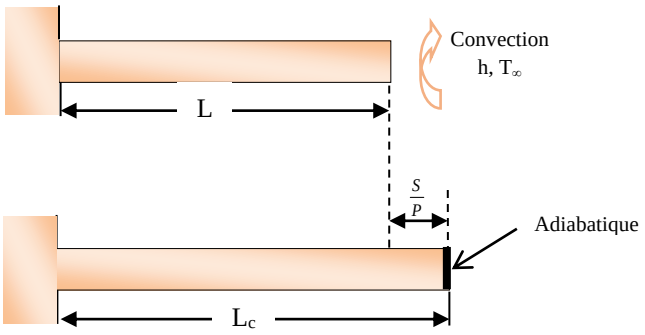


Figure 2.6 : Longueur d'ailette corrigée

2.6. Exercices sur le chapitre

Exercice 01 : On fait bouillir de l'eau dans une casserole en métal. Le manche de 20 cm de longueur et de 2 cm de diamètre est assimilé à une ailette circulaire de section uniforme exposée à l'air ambiant dont la température et le coefficient d'échange par convection sont respectivement T_∞ = 25°C et h = 7 W/m^2. °C. Peut-on toucher le manche si ce dernier est fabriqué en aluminium (λ = 210 W/m°C).

Solution : $P = \pi d = 0.0628$ m, $S = \dfrac{\pi d^2}{4} = 3.14\times10^{-4}\,m^2$. On suppose que la section terminale de l'ailette est isolée (L_C = L), le profil de température et le flux thermique sont :

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0(x)} = \frac{T(x)-T_\infty}{T_B-T_\infty} = \frac{ch\left[n(L-x)\right]}{ch(nL)} \text{ et } \Phi_{ailette} = \sqrt{h.P.\lambda.S}.(T_B-T_\infty)\,th(nL)$$

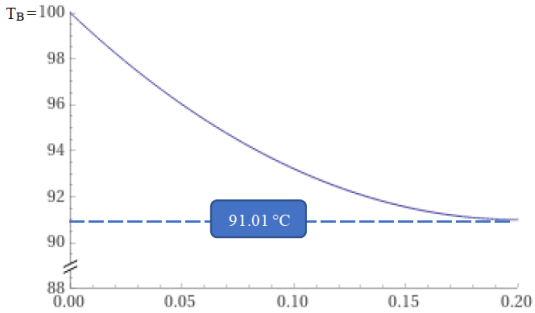
Avec : $n = \sqrt{\dfrac{hP}{\lambda S}} = \sqrt{\dfrac{7\times0.0628}{210\times3.14\times10^{-4}}} = 2.58\,m^{-1}$

Et $th(nL) = th(2.58\times20\times10^{-2}) = 0.47$

Le profil de température est donc :

$$T(x) = T_\infty + (T_B - T_\infty)\frac{ch\left[n(L-x)\right]}{ch(nL)}$$

Il vient : $T(x) = 25 + 66.014\,ch\left[(0.516 - 2.58x)\right]$

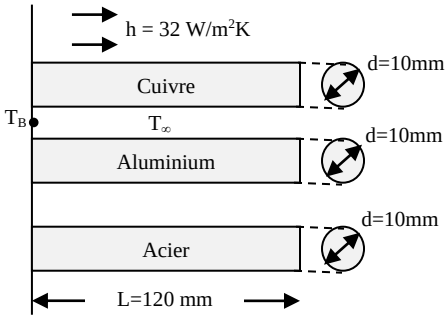


Le profil de température illustré ci-contre est tracé dans le site : https://www.wolframalpha.com/

Le flux échangé est donc : $\Phi_{ailette} = \sqrt{7\times0.0628\times210\times3.14\times10^{-4}}\times(100-25)\times0.47 = 6\,W$

Conclusion : on ne peut pas toucher le manche

Exercice 02 : On considère trois ailettes identiques exposées à un écoulement d'air avec un coefficient d'échange par convection de 32 W/m^2.K (voir figure ci-dessous). Les ailettes sont fabriquées respectivement en : Cuivre : λ = 380 W.m^{-1}.K^{-1}, Aluminium : λ = 210 W.m^{-1}.K^{-1}, Acier : λ = 45 W.m^{-1}.K^{-1}. Comparer les performances énergétiques des trois ailettes.



Solution : On utilise le concept de la longueur corrigée, on a : $L_c = L + \dfrac{d}{4} = 120 + \dfrac{10}{4} = 122.5mm$,

par conséquent : $P = \pi d = 0.0314\,m$, $S = \dfrac{\pi d^2}{4} = 0.785\times10^{-4}\,m^2$ d'où le paramètre de l'ailette :

$$n = \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}} = \sqrt{\frac{32\times0.0314}{0.785\times10^{-4}\times\lambda}} = \frac{113.13}{\sqrt{\lambda}}$$

Sachant que le rendement est calculé par : $\eta_{ailette} = \dfrac{th(nL_c)}{nL_c}$, les résultats des trois matériaux sont récapitulés dans le tableau suivant :

Matériaux	n	nL_c	$th(nL_c)$	$\eta_{ailette}$	Dissipation thermique relative par rapport à l'ailette de cuivre
Cuivre	5.804	0.711	0.611	86%	100%
Aluminium	7.807	0.956	0.742	77.6%	90.2%
Acier	16.865	2.066	0.968	46.8%	54.5%

Le taux de dissipation de la chaleur par l'ailette en acier est le plus faible par rapport aux deux autres matériaux, également son efficacité est faible. Ceci est justifié par sa faible conductivité thermique. L'efficacité de l'ailette en cuivre est la plus élevée, cette dernière peut être améliorée si les ailettes sont courtes.

Exercice 03 : Une barre très longue de 12 mm de section carrée en acier de conductivité thermique λ = 51.9 W/m.K est attachée à la paroi d'un four de 200 °C. Sachant que la température du milieu extérieure est T_∞ = 35 °C et le coefficient de transfert de chaleur par convection est estimé à 22 W/m^{2}K. Calculer :

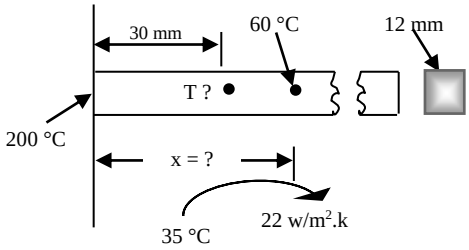
- La distance à laquelle la température est égale à 60 °C.
- La température à 80 mm de la paroi.

On considère les deux cas suivants : ailette dont la section terminale est adiabatique et ailette dont section terminale soumise à un flux convectif. Déterminer :

- La température à la section terminale de l'ailette (on prend L = 159 mm).
- La température à 80 mm de la paroi du four (on prend L = 80 mm).

Solution

- Calcul de la distance quand T = 60 °C :



Pour une ailette longue on a : $\dfrac{T(x)-T_\infty}{T_B-T_\infty} = \dfrac{60-35}{200-35} = \exp(-nx)$

Avec : $n = \sqrt{\dfrac{hP}{\lambda S}} = \sqrt{\dfrac{22\times 4\times 0.012}{51.9\times(0.012)^2}} = 11.89\ m^{-1}$

D'où x = 0.159 m = 159 mm.

- Calcul de la température à 80 mm : $T(0.08) = 35+(200-35)\exp(-11.89\times 0.08) \Rightarrow T = 98.74°C$

- Pour une ailette dont la section terminale est adiabatique, on a : $\dfrac{T(x)-T_\infty}{T_B-T_\infty} = \dfrac{ch[n(L-x)]}{ch(nL)}$

En en déduire la température en L= 0.159 m,

$$T(x=0.159) = 35+(200-35)\frac{ch[11.89(0.159-0.159)]}{ch(11.89\times 0.159)} = 83.72\ °C$$

À 0.08 m de la paroi du four, la température est donc :

$$T(x=0.08) = 35+(200-35)\frac{ch[11.89(0.159-0.08)]}{ch(11.89\times 0.159)} = 106.84\ °C$$

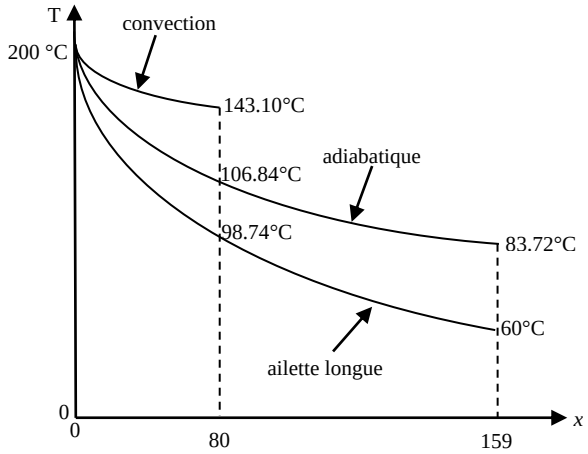
- Pour une ailette dont le bout soumis un flux convectif, on a :

$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_B-T_\infty}=\frac{ch\left[n(L-x)\right]+\left(\frac{h}{\lambda n}\right)sh\left[n(L-x)\right]}{ch(nL)+\left(\frac{h}{\lambda n}\right)sh(nL)}$$, la température en x = L = 80 mm est donc :

$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_B-T_\infty}=\frac{ch\left[11.89(0.08-0.08)\right]+\left(\frac{22}{51.9\times11.89}\right)sh\left[11.89(0.08-0.08)\right]}{ch(11.89\times0.08)+\left(\frac{22}{51.9\times11.89}\right)sh(11.89\times0.08)}\Rightarrow T(x=0.08)=143.1°C$$

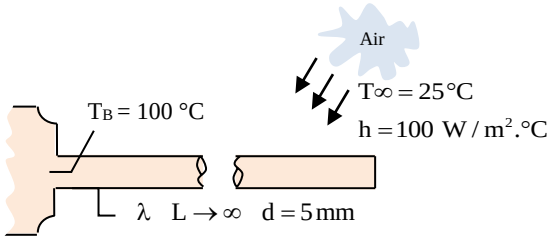
La variation de température pour les différentes conditions aux limites est illustrée sur la figure suivante :

-



Exercice 04 : Une ailette très longue de 5 mm de diamètre est attachée à un solide chauffé à une température de 100 °C. La surface de l'ailette est exposée à l'air environnant dont la température et le coefficient d'échange convectif sont respectivement 25 °C et 100 $W.m^{-2}K^{-1}$ (voir figure ci-dessous).

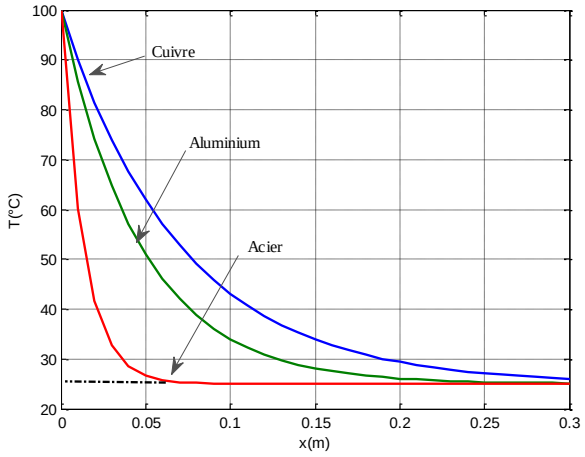
- Déterminer la distribution de température le long de l'ailette pour les trois cas suivants : cuivre pur : λ = 398 $W.m^{-1}.K^{-1}$, alliage d'aluminium 2024 : λ = 198 $W.m^{-1}.K^{-1}$ et l'acier inoxydable AISI type 316 : λ = 14 $W.m^{-1}.K^{-1}$.
- Déterminer les flux de chaleur dissipés ainsi que les longueurs correspondantes.



Solution : - En se basant sur l'hypothèse d'une ailette longue, la distribution de température vérifiée l'équation suivante :

$$T(x)=T_\infty+(T_B-T_\infty)\exp(-nx)$$, avec $n=\sqrt{\frac{hP}{\lambda S}}$ est le paramètre de l'ailette

En remplaçant « h » et « d », ainsi que les conductivités thermiques, les valeurs de « n » sont respectivement : 14.2, 21.2 et 75.6 m^{-1}. Les distributions de température peuvent ensuite être calculées et tracées sur la figure suivante :



- Le flux dissipé peut se calculer par la relation suivante : $\Phi_{ailette} = \sqrt{hP\lambda S}\left(T_B - T_\infty\right)$

✓ Pour le cuivre : $\Phi_{ailette} = \sqrt{100\times\pi\times0.005\times398\times\frac{\pi\times(0.005)^2}{4}}(100-25) = 8.3\ W$

✓ Pour l'aluminium : $\Phi_{ailette} = \sqrt{100\times\pi\times0.005\times180\times\frac{\pi\times(0.005)^2}{4}}(100-25) = 5.6\ W$

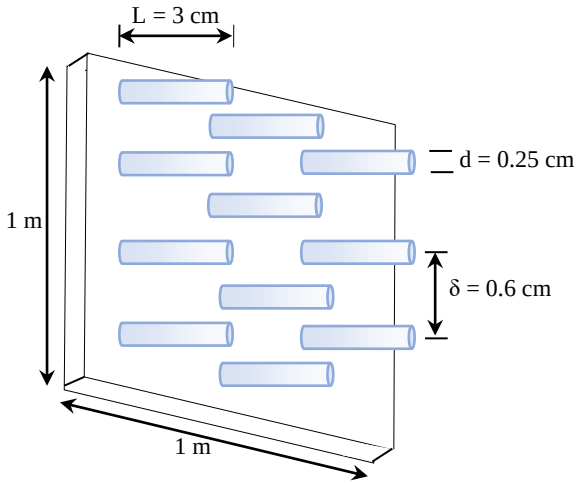
✓ Pour l'acier : $\Phi_{ailette} = \sqrt{100\times\pi\times0.005\times14\times\frac{\pi\times(0.005)^2}{4}}(100-25) = 1.6\ W$

On peut constater que le flux dissipé à la section terminale d'une ailette infinie, une estimation de la validité de cette approximation peut être faite en comparant l'équation donnant le flux pour une ailette infinie et une ailette adiabatique. On trouve $th(nL) \geq 0.99$

Avec : $nL \geq 2.65 \Rightarrow L \geq L_\infty \equiv \frac{2.65}{n} = 2.65\sqrt{\frac{\lambda S}{hP}}$

d'où les longueurs correspondantes sont : Le cuivre $L_\infty = 0.19$ m, l'aluminium $L_\infty = 0.13$ m et l'acier $L_\infty = 0.04$ m

Exercice 05 : On veut refroidir un corps chaud de 100 °C par fixation d'ailettes en aluminium de conductivité thermique λ = 237 $W.m^{-1}.°C^{-1}$ (voir figure ci-dessous). La température du milieu environnant est de 30 °C et le coefficient de transfert de chaleur convectif sur les surfaces est de 35 $W/m^2.°C$. Déterminer le flux thermique dissipé ainsi que l'efficacité globale des ailettes.



Solution : - Calcul du flux total échangé : On remarque que L>>>d, alors, on peut considérer le cas d'une section terminale adiabatique. Le rendement alors est donnée par : $\eta_{ailette} = \dfrac{th(nL)}{nL}$

$n = \sqrt{\dfrac{hP}{\lambda S}}$ **AN :** $n = \sqrt{\dfrac{h\pi d}{\lambda \dfrac{\pi d^2}{4}}} = \sqrt{\dfrac{4h}{\lambda d}} = \sqrt{\dfrac{4\times 35}{237\times 0.0025}} = 15.371\ m^{-1}$ et $\eta_{aillete} = \dfrac{th(15.371\times 0.03)}{15.371\times 0.03} = 0.935$

Le nombre d'ailettes attaché à la surface primaire S_p est $N = \dfrac{1}{\delta}\times\dfrac{1}{\delta} = 167\times 167 \approx 27889$ par conséquent, la surface totale des ailettes :

$$S_a = 27889\left(\pi dL + \frac{\pi d^2}{4}\right) = 27889\left(\pi\times 0.0025\times 0.03 + \frac{\pi\times(0.0025)^2}{4}\right) = 6.70 m^2$$

La surface d'échange sans ailettes :

$$S_s = S_p - NS = 1 - 27889\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = 1 - 27889\left(\frac{\pi\times(0.0025)^2}{4}\right) = 0.863 m^2$$

Le flux thermique dissipé par l'ensemble des ailettes peut se calculer comme suit :

$$\Phi_{ailette} = N\times\sqrt{hP\lambda S}(T_B - T_\infty)th(nL)$$

$$= 27889\times\sqrt{35\times\pi\times 0.0025\times 237}\frac{\pi\times(0.0025)^2}{4}(100-30)th(15.37\times 0.03) = 15038.561\ W$$

On peut aussi calculer ce flux par :

$$\Phi_{ailette} = \eta_{ailette}\Phi_{ideal} = \eta_{ailettes}hS_a(T_B - T_\infty) = 0.935\times 35\times 6.70\times(100-30) = 15348.025 W$$

Le flux thermique échangé sans ailettes (surface entre ailettes) peut se calculer comme suit :

$$\Phi_{sansa\,ailettes} = hS_s(T_B - T_\infty) = 35\times 0.863\times(100-30) = 2114.35 W$$

Le flux total est alors : $\Phi_{total} = \Phi_{ailettes} + \Phi_{sansailettes} = 15038.561 + 2114.35 = 17152.911 W$

- L'efficacité de la surface munie d'ailettes peut être défini comme étant le rapport entre le flux de chaleur total évacué avec ailettes, et le flux de chaleur total évacué sans ailette, soit :

$$\varepsilon_{globale} = \frac{\Phi_{total}}{hS_p(T_B - T_\infty)} = \frac{17152.91}{35\times(1\times 1)(100-30)} = 7.0$$

On peut aussi calculer l'efficacité globale par :

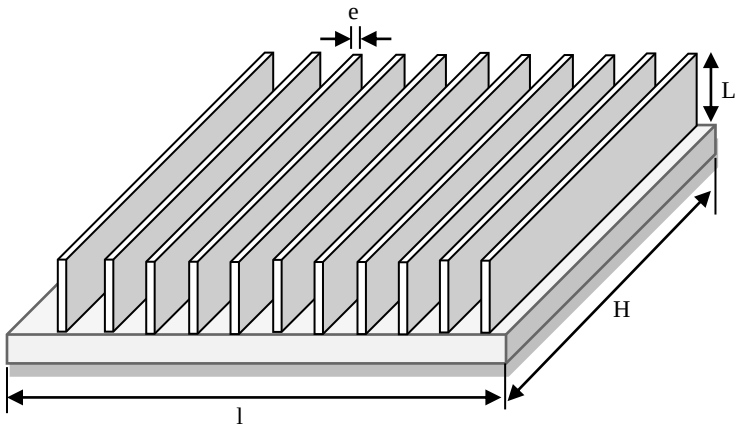
$$\varepsilon_{globale} = 1 + N\frac{S}{S_p}(\varepsilon_{ailette} - 1) = 1 + N\frac{S}{S_p}\left(\frac{\Phi_{ailette}}{hS(T_B - T_\infty)} - 1\right)$$

Relation dans laquelle, $\Phi_{ailette} = \dfrac{15038.561}{27889} = 0.539\ W$ est le flux évacué par une seule ailette, d'où :

$$\varepsilon_{globale} = 1 + 27889\times\frac{\left(\frac{\pi\times 0.0025^2}{4}\right)}{1}\left(\frac{0.539}{35\times\left(\frac{\pi\times 0.0025^2}{4}\right)(100-30)} - 1\right) = 6.99 \approx 7$$

Exercice 06 : on se propose d'étudier le processus de refroidissement d'un composant électronique. Ce dernier est constitué d'une plaque munie d'ailettes en forme rectangulaire (voir figure ci-dessous). On suppose que la section terminale de l'ailette est adiabatique, calculer le flux évacué par le système.

Données : h = 10 $W/m^2.°C$, λ = 398 $W.m^{-1}.°C^{-1}$, T_B = 125 °C, T_∞ = 25°C
l = H = 10 cm, L= 5 cm, e = 0.1 cm, nombre d'ailette N = 50



Solution : On calcul d'abord le paramètre de l'ailette

$$n = \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}} = \sqrt{\frac{h \times 2(l+e)}{\lambda (l \times e)}} = \sqrt{\frac{10 \times 2(0.1+0.001)}{398(0.1 \times 0.001)}} = 7.124 \text{ m}^{-1}$$

Le flux échangé par l'ensemble des ailettes est le produit du nombre d'ailettes N par le flux évacué par une seule ailette, soit :

$$\Phi_{ailette} = N \times \sqrt{hP\lambda S}\,(T_B - T_\infty)\,\text{th}(nL)$$

$$= 50 \times \sqrt{10 \times 2(0.1+0.001) \times 398 \times (0.1 \times 0.001)}\,(125-25)\,\text{th}(7.124 \times 0.005)$$

$$\Phi_{ailette} = 10.095 \text{ W}$$

La surface totale des ailettes :

$$S_a = N\left[2(l+e)L + (l \times e)\right] = 50\left[2(0.1+0.001) \times 0.05 + (0.1 \times 0.001)\right] = 0.51 \text{m}^2$$

La surface d'échange sans ailettes (entre ailettes) :

$$S_s = S_p - NS = (0.1 \times 0.1) - 50(0.1 \times 0.001) = 0.005 \text{m}^2$$

Le flux thermique échangé sans ailettes (surface entre ailettes) peut se calculer comme suit :

$$\Phi_{sansailettes} = hS_s\,(T_B - T_\infty) = 10 \times 0.005 \times (125-25) = 5 \text{ W}$$

Le flux total est alors :

$$\Phi_{total} = \Phi_{ailettes} + \Phi_{sansailettes} = 10.095 + 5 = 15.095 \text{W}$$

Pour voir l'intérêt que porte l'emplacement des ailettes, on calcule le flux échangé sur la surface primaire :

$$\Phi = hS_p\,(T_B - T_\infty) = 10 \times (0.1 \times 0.1) \times (125-25) = 10 \text{ W}$$

Nous constatons qu'avec l'utilisation d'ailettes la dissipation de chaleur est améliorée de 66 % et en conséquence l'échange de chaleur est important.

Exercice 07 : Une paroi dont la température est T_B = 50 °C est pourvue d'ailettes rectangulaires en acier λ = 37.2 kcal/h.m.°C comme le montre la figure ci-dessous. Si on suppose que la chaleur évacuée par l'extrémité de l'ailette est négligeable (section terminale adiabatique) et le coefficient de transmission de chaleur par convection entre l'air à T_∞ = 21 °C et l'ailette est égal à 24.4 kcal/h.m^2.°C. Déterminer la loi de répartition de la température le long de l'ailette. En déduire la température à son extrémité.

On donne : L = 4 cm ; l = 2 cm ; e = 2 mm.

Solution : En effectuant un bilan thermique sur un tronçon de largeur dx de l'ailette, son énergie interne dU reste invariable (régime stationnaire et système indéformable), on a :

$$\Phi_{cond}(x)-\Phi_{cond}(x+dx)-\Phi_{conv}=0 \qquad (1)$$

Avec : $\Phi_{cond}(x)$: Flux conductif en x.

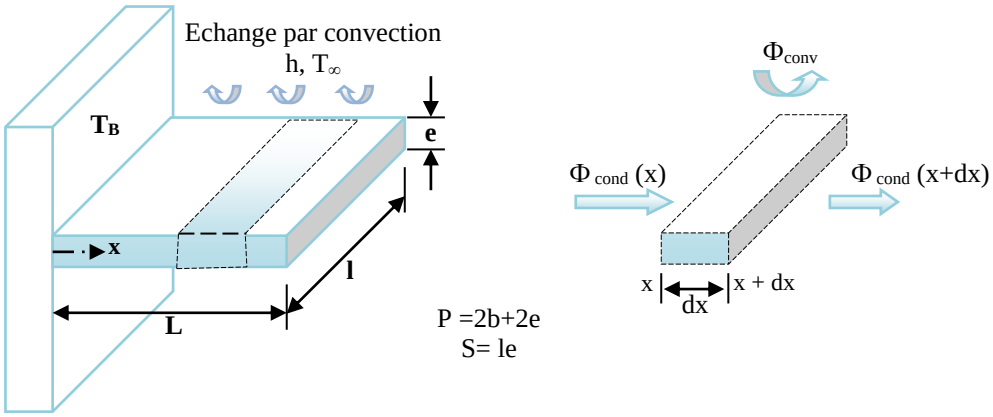
$\Phi_{cond}(x+dx)$: Flux conductif en x+dx.

Φ_{conv} : Perte convective en x et x+dx.

En remplaçant les flux thermiques par leurs expressions, l'équation (1) devient :

$$\left[\left(-\lambda\frac{dT(x)}{dx}\right)_x S\right]-\left[\left(-\lambda\frac{dT(x)}{dx}\right)_{x+dx} S\right]=hdA\left(T(x)-T_\infty\right) \qquad (2)$$

Avec dA, la surface externe de l'élément égale Pdx (P est le périmètre de l'ailette). En réarrangeant, l'équation (2) devient :



$$\frac{\left[\left(\lambda\frac{dT(x)}{dx}\right)_{x+dx} S\right]-\left[\left(\lambda\frac{dT(x)}{dx}\right)_x S\right]}{dx}=hP\left(T(x)-T_\infty\right) \qquad (3)$$

Ou encore :
$$\left[\lambda S\left(\frac{d^2T(x)}{dx^2}\right)\right]=hP\left(T(x)-T_\infty\right) \qquad (4)$$

Ce qui donne finalement :
$$\frac{d^2T(x)}{dx^2}-\frac{hP}{\lambda S}\left(T(x)-T_\infty\right)=0 \qquad (5)$$

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2}-\frac{2h(l+e)}{\lambda\times l\times e}\left(T(x)-T_\infty\right)=0$$

On pose :
$$n^2=\frac{h2(l+e)}{\lambda\times l\times e} \quad \text{et} \quad \theta(x)=T(x)-T_\infty$$

D'où :
$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2}-n^2\theta(x)=0 \qquad (6)$$

C'est une équation différentielle du second ordre linéaire et homogène à coefficients constants admet une solution générale de la forme :

$$\theta(x)=C_1e^{nx}+C_2e^{-nx} \qquad (7)$$

Les constantes d'intégration sont obtenues en utilisant les conditions aux limites à la base (x = 0) et à l'extrémité de l'ailette (x = L). Une première condition est que, en x=0, T = T_B ce qui

implique naturellement : $\theta(0)=T_B-T_\infty$ ce qui donne : $\theta(0)=C_1+C_2$. Une deuxième condition aux limites est que, en x=L, le flux est pratiquement nul. Physiquement ceci se traduit par la conservation de flux : $-\lambda S\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=L}=0=nC_1e^{nL}-nC_2e^{-nL}$. La résolution du système à deux équations nous donne donc :

$$C_1=\theta(0)\left(\frac{e^{-nL}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right) \qquad \text{et} \qquad C_2=\theta(0)\left(\frac{e^{nL}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right)$$

En remplaçant les deux constantes dans l'équation (I.7), on obtient :

$$\theta(x)=\left(\left[\frac{\theta(0)e^{-nL}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right]e^{nx}+\left[\frac{\theta(0)e^{nL}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right]e^{-nx}\right)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta(0)}=\left(\frac{e^{-n(L-x)}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right)+\left(\frac{e^{n(L-x)}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta(0)}=\left(\frac{e^{-n(L-x)}+e^{n(L-x)}}{e^{nL}+e^{-nL}}\right)$$

$$sh=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$ch=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

Donc la loi de répartition de la température le long de l'ailette s'écrit :

$$T(x)=T_\infty+\frac{T_B-T_\infty}{ch(nL)}ch\left[n(L-x)\right] \qquad (8)$$

On en déduire la température à l'extrémité de l'ailette en remplaçant x par L dans l'équation (8), on obtient :

$$T(L)=T_\infty+\frac{T_B-T_\infty}{ch(nL)} \qquad \textbf{AN :}\ T(0.04)=38.73\ °C$$

Exercice 08 : Pour déterminer la conductivité thermique d'une longue barre de 25 mm de diamètre, on introduit une moitié de la barre dans un four, l'autre moitié reste exposée à l'air de température de 27 °C. Lorsque le régime permanent est établi, les températures de deux points distants de 75 mm sont respectivement égales à 125 °C et 91 °C. Quelle est la conductivité thermique de la barre sachant que le coefficient d'échange de chaleur sur la surface de la barre exposée à l'air est égal à 17.3 kcal/hm^2.°C.

Solution : l'ailette est très longue, on peut alors écrire le profil de température pour deux points différents dont la distance est connue, soit :

$$\begin{cases} T(A)=T_\infty+(T_B-T_\infty)\exp(-nx_A) & (1) \\ T(B)=T_\infty+(T_B-T_\infty)\exp(-nx_B) & (2) \end{cases}$$

Les distances x_A et x_B sont inconnues, et leur différence vaut 75 mm. Ceci nous permet de déterminer le paramètre de l'ailette « n » en devisant l'équation (1) par l'équation (2), on a :

$$\frac{T(A)-T_\infty}{T(B)-T_\infty}=\exp\left[-n(x_A-x_B)\right]\Rightarrow n=\frac{1}{(x_B-x_A)}\ln\left(\frac{T(A)-T_\infty}{T(B)-T_\infty}\right)=\frac{1}{75\times10^{-3}}\ln\left(\frac{125-27}{91-27}\right)=5.68\,m^{-1}$$

Et comme $n=\sqrt{\frac{hP}{\lambda S}}=\sqrt{\frac{h2\pi r}{\lambda\pi r^2}}=5.68$, d'où on tire la conductivité thermique :

$$\lambda=\frac{2h}{n^2r}=\frac{2\times\left(\frac{17.3\times1000}{3600}\right)\times4.18}{(5.68)^2\times12.5\times10^{-3}}=99.62\ W/m$$

3.1. Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons considéré la conduction de la chaleur dans des conditions stables ou stationnaire pour lesquelles la température en tout point du corps ne varie pas avec le temps. Cela a certainement simplifié l'analyse, surtout lorsque la température varie dans une seule direction. Toutefois, de nombreux problèmes de conduction thermique rencontrés dans les applications d'ingénierie impliquent le temps comme variable indépendante.

Le but principal de ce chapitre est de déterminer la variation de température en fonction du temps et de la position dans le milieu. Dans un système de coordonnées cartésiennes, cette variation est exprimée par T(x,y,z,t), L'équation générale de conduction (1.18) se réduit donc à l'équation de Fourier :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (3.1)$$

Si l'écoulement de la chaleur est unidimensionnel T = f(x,t), l'équation 3.1 devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (3.2)$$

On distingue deux types de problèmes :

a) Problèmes pour lesquels la résistance interne du milieu est négligeable. Cette hypothèse implique que les gradients de températures sont nuls et la distribution de température est uniquement temporelle T(t) (température uniforme sur l'ensemble du milieu). Ces systèmes sont appelés ***systèmes thermiques minces*** ;

b) Problèmes pour lesquels la résistance interne du milieu n'est pas négligeable. Dans ce cas, la distribution de température est spatio-temporelle T(x,t). Ces systèmes sont appelés ***systèmes thermiques épais*** ;

3.2. Systèmes thermiques minces (systèmes à température uniforme)

Lors de l'étude de ces systèmes, la température est considérée uniforme, ce qui est à priori contradictoire avec le principe de la propagation de la chaleur car il est nécessaire qu'il y a un gradient thermique pour qu'il existe le transfert de chaleur. Cette hypothèse peut néanmoins être justifiée dans certain cas que l'on va préciser. Considérons par exemple un corps métallique chaud de masse « m », de volume « V », de surface « S », de densité « ρ », et de chaleur spécifique « C_p » initialement à la température « T_i » immergé dans un fluide à la température « T_∞ » (avec $T_\infty < T_i$ ou $T_\infty > T_i$) (voir figure 3.1). A partir de l'instant de submersion (t = 0) la température du corps décroit jusqu'à atteindre « T_∞ ». Si l'on suppose que la température dans le corps est uniforme à tout moment et ne varie qu'avec le temps T = T (t), la conduction interne est suffisamment bonne (λ élevé) et la résistance thermique interne est donc négligeable par rapport à la résistance sur la surface.

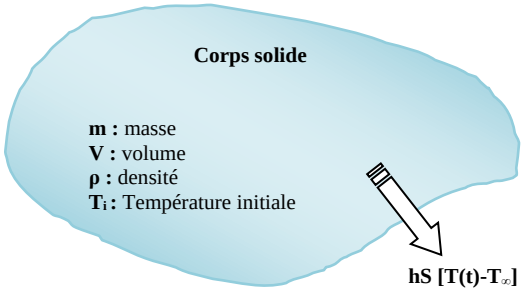


Figure 3.1 : Géométrie et paramètres du corps mince considéré

En négligeant les gradients de température $\left(\frac{\partial T}{\partial x}=0\right)$ nous ne pouvons pas utiliser l'équation de transmission de chaleur (3.2). Cependant on établit un bilan d'énergie global pendant un intervalle de temps dt : ***La variation d'énergie interne pendant le temps dt = la quantité de chaleur échangée avec le fluide pendant dt***

Ce qui se traduit au système suivant :

$$\begin{cases} \overbrace{\rho V}^{m} C_p \dfrac{dT(t)}{dt} = -hS\left(T(t)-T_\infty\right) \\ t=0 \rightarrow T(0)=T_i \end{cases} \tag{3.3}$$

L'intégration de l'équation 3.3 nous donne la distribution temporelle de la température dans le corps, ou alternativement le temps t requis pour que la température atteigne une valeur T(t) spécifiée telle que :

$$T(t)-T_\infty = Ae^{-Bt} \Rightarrow \frac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \exp\left(\frac{-hS}{\rho VC_p}t\right) \tag{3.4}$$

Cette distribution est tracée sur la figure 2.2. On peut tirer les observations suivantes :

- La température s'approche exponentiellement de la température ambiante « T_∞ »
- La variation est rapide au début du processus, au fur et à mesure du temps, elle devient lente.
- Une grande valeur du terme $\frac{-hS}{\rho VC_p}$ indique que le corps se rapproche rapidement à la température ambiante (vitesse de décroissance de la température est élevée).
- Le terme $\frac{-hS}{\rho VC_p}$ est proportionnel à la surface, tandis qu'il est inversement proportionnel à la masse et à la chaleur spécifique. Alors il faut plus de temps pour chauffer ou refroidir une plus grande masse, surtout quand il a une grande chaleur spécifique.

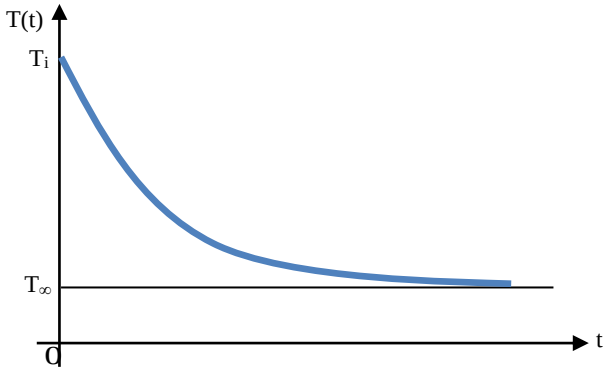


Figure 3.2 : Evolution temporelle de la température

On peut constater que le groupement $\tau = \frac{\rho VC_p}{hS}$ est caractéristique à la dimension d'un temps : c'est la ***constante de temps*** du système que l'on peut interpréter comme le produit de la résistance thermique de convection et de la capacité thermique globale du corps, soit :

$$\tau = \left(\frac{1}{hS}\right)\left(\rho VC_p\right) = R_{th}C_{th} \tag{3.5}$$

En remplaçant la constante de temps par son expression, l'équation 3.4 devient :

$$\frac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right) \tag{3.6}$$

Remarques :

- ✓ Pour $t=\tau$: $\frac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\exp(-1)=0.3678$: Cela signifie qu'à l'instant « t », l'écart entre la température du corps solide et la température du milieu environnant est égale à environ 37% de l'écart initial (voir figure 2.3).
- ✓ Pour $t=\infty$: $\frac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}=0$, cela signifie que la température du solide tend vers la température du milieu dans lequel il est plongé.
- ✓ En pratique, on considère qu'un système atteint la température du milieu extérieur lorsque $\frac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}=0.01(1\%)$ ce qui correspond à un temps $-\frac{t}{\tau}=\ln 0.01=-2\ln 10$ soit : $t=2\tau\ln 10\approx 4.6\tau$

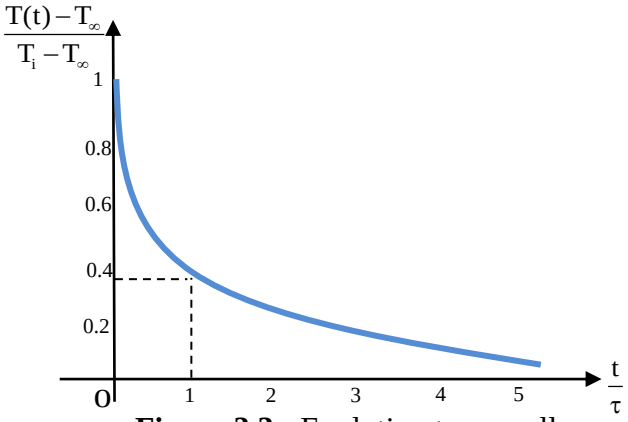


Figure 3.3 : Evolution temporelle

Le flux de chaleur transféré entre le corps et son environnement, est calculé par :

$$\Phi=hS.\left(T(t)-T_\infty\right)=hS\left(T_i-T_\infty\right)\exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right) \tag{3.7}$$

Quant à l'énergie thermique totale transmise, elle est calculée aisément par la relation :

$$Q=\int_0^t\Phi dt=hS\int_0^t\left(T_i-T_\infty\right)\exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right)dt=\rho VC_p\left(T_i-T_\infty\right)\left[1-\exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right)\right] \tag{3.8}$$

3.2.1. Validité de l'approximation des systèmes thermiques minces

La question qui se pose maintenant est jusqu'à quelle limite peut-on négliger la résistance thermique à l'intérieur du corps, quelles sont donc les limites d'application de la méthode des gradients nuls. Pour répondre à cette question nous étudions le problème stationnaire de la conduction dans un mur dont l'une des surfaces est à « T_{P_1} » et l'autre est exposée un fluide dont la température et le coefficient de transfert de chaleur par convection sont respectivement « T_∞ » (avec $T_\infty < T_{P_1}$) et « h » (voir figure 3.4). Dans des conditions stationnaires le bilan d'énergie sur cette surface s'écrit sous la forme :

$$\lambda S\frac{\left(T_{p1}-T_{p2}\right)}{L}=hS\left(T_{P2}-T_\infty\right) \tag{3.9}$$

$$\text{Ou encore :}\quad \frac{\left(T_{p1}-T_{p2}\right)}{\left(T_{P2}-T_\infty\right)}=\frac{\left(L/\lambda S\right)}{\left(1/hS\right)}=\frac{\text{Résistance conductive}}{\text{Résistance convective}}=\frac{hL}{\lambda}=Bi \tag{3.10}$$

Avec, h est le coefficient d'échange convectif, λ est la conductivité thermique.

L : Longueur caractéristique ou **dimension caractéristique** égale à (V/S). Les longueurs caractéristiques pour des géométries simples dans lesquelles le transfert de chaleur est unidimensionnel, telle qu'une grande paroi plane d'épaisseur « 2L », un long cylindre de rayon « r_o » et une sphère de rayon « r_o », sont respectivement : « L », « $r_o/2$ » et « $r_o/3$ ».

Le rapport « hL/λ » est un paramètre sans dimension appelé **nombre de Biot**, il joue un rôle fondamental dans les problèmes de conduction qui impliquent des effets de convection à la surface. Selon l'équation 3.10 et comme l'illustre la figure 3.4, le nombre de **Biot** fournit une mesure de la chute de température dans le solide par rapport à la différence de température entre la surface du solide et le fluide. Il est également évident que le nombre de **Biot** peut être interprété comme un rapport de résistances thermiques. En particulier :

- ✓ Si **Bi << 1 :** $((T_{P_1} - T_{P_2}) << (T_{P_2} - T_\infty))$, la résistance de conduction est bien inférieure à la résistance par convection, on peut considérer alors que le profil est plat, la température ne varie pas dans l'épaisseur du mur. Par conséquent, l'hypothèse d'une répartition uniforme de la température dans le solide est raisonnable.
- ✓ Si **Bi >> 1 :** $((T_{P_1} - T_{P_2}) >> (T_{P_2} - T_\infty))$, la température varie dans le mur, la résistance thermique est suffisamment importante pour engendrer un gradient de température dans l'épaisseur du mur.

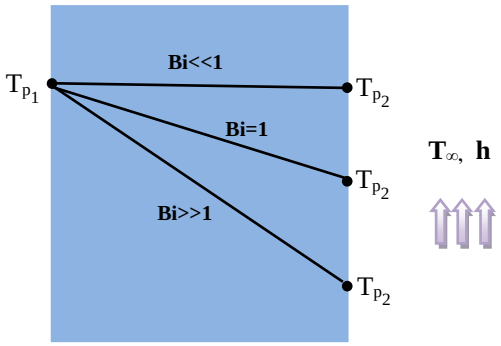


Figure 3.4 : Validité de l'hypothèse des systèmes minces

Pour conclure, le nombre de Biot permet d'adopter un critère distinctif entre corps mince et corps épais. En général :

- $Bi < 0.1$: **le système thermique est mince**
- $Bi \geq 0.1$: **le système thermique est épais**

N.B : La définition du nombre de **Biot** basée sur « L » n'est valide que lors de calculs avec la méthode du gradient nul (systèmes dont la résistance thermique est négligeable) !!!

On peut récrire les résultats sous une forme plus compacte en introduisant le nombre de **Biot** ainsi que le nombre de Fourier que nous allons définir. L'équation 3.6 devient :

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left[-\left(\frac{hL}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{\rho C_p L^2}t\right)\right] \qquad (3.11)$$

Expression que l'on peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left(-BiF_0\right) \qquad (3.12)$$

Avec, « F_0 » est le nombre de Fourier équivalent à un temps adimensionnel. Il caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable. C'est une autre grandeur caractéristique

importante pour l'étude et la compréhension des problèmes de transmission de chaleur instationnaire.

Exemple 3.1 : Déterminer le temps nécessaire pour qu'une sphère en acier de 1.25 cm de diamètre initialement à 500 °C soit portée à 100 °C par un gaz à 25 °C. Le coefficient d'échange par convection vaut 110 W/m^2.K . On donne pour l'acier : ρ = 7801 kg/m^3 ; C_p = 473 J/kg.K ; λ = 40 W/m.K. Calculer le flux et l'énergie totale pendant les deux premières minutes.

Solution : on calcul d'abord le nombre de Biot :

$$L = \frac{V}{S} = \frac{D}{6} \Rightarrow Bi = \frac{hL}{\lambda} = \frac{110(0.0125/6)}{40} = 0.0057 < 0.1 \rightarrow \textbf{\textit{système thermique mince}}$$

L'équation 3.6 donne : $t = -\tau \ln\left(\frac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right) = -\frac{7801(0.0125/6)473}{110}\ln\left(\frac{100-25}{500-25}\right)$

D'où t = 128.99 s = 2.149 min. Le flux échangé est :

$$\Phi = hS(T_i - T_\infty)\exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right) = 110.4\pi(0{,}00625)^2(500-25)\exp\left(-\frac{1}{69.88}128.99\right) = 6.134 \text{ W}$$

Et l'énergie totale transmise est : $Q = \rho V C_p (T_i - T_\infty)\left[1-\exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right)\right]$

A.N : $Q = 7801\left(\frac{4}{3}\pi(0.00625)^3 473\right)(500-25)\left[1-\exp\left(-\frac{1}{69.88}128.99\right)\right] = 1362.787\,J$

3.3. Systèmes thermiques épais

Lorsque le gradient de température dans le solide ne peut être supposé nul, que le nombre de **Biot** est supérieur à 0.1, la variation température est donc spatio-temporelle. Dans ce cas les méthodes de résolution de l'équation de la chaleur sont nombreuses, on distingue : les méthodes analytiques (transformation de Laplace, séparation des variables, transformation de Boltzmann, fonctions de Green), et les méthodes numériques (différences finies, volumes finis, etc).

3.3.1. Méthodes analytiques

3.3.1.1. Technique utilisant la transformée de Laplace

On rappelle que la transformée de Laplace notée T(x,p) d'une fonction T(x,t) est définie par la relation :

$$L\langle T(x,t)\rangle = T(x,p) = \int_0^\infty T(x,t)e^{-pt}dt \qquad p \in R, \text{ ou } C \tag{3.13}$$

Avec, T(x,p) est appelée image ou transformée de la fonction originale T(x,t)

L'équation différentielle gouvernante est transformée du domaine x, t au domaine x, p. Le premier terme de l'équation est transformé comme suit :

$$L\left\langle a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right\rangle = a\frac{\partial^2 T(x,p)}{\partial x^2} \tag{3.14}$$

Supposons le cas particulier très courant ou la répartition initiale (à l'instant t = 0) des températures est uniforme T(x,0) = T_i, le deuxième terme est transformé selon la relation suivante :

$$L\left\langle\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right\rangle = \left[T(x,t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt}T(x,t)dt\right]$$

Or : $$L\left\langle \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \right\rangle = pT(x,p) - T_i \qquad (3.15)$$

D'où, l'équation différentielle transformée a pour expression :

$$\frac{d^2T(x,p)}{dx^2} - \frac{P}{a}T(x,p) = -\frac{T_i}{a} \qquad (3.16)$$

Pour faciliter la résolution, posons $\theta(x,p) = T(x,p) - T_i$, l'équation transformée devient :

$$\frac{d^2\theta(x,p)}{dx^2} - \frac{P}{a}\theta(x,p) = 0 \qquad (3.17)$$

La solution générale est donnée par :

$$\theta(x,p) = C_1\exp(-kx) + C_2\exp(kx) = C_1\exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}}x\right) + C_2\exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right) \text{ Avec : } k^2 = \frac{p}{a} \qquad (3.18)$$

A partir de la solution transformée $\theta(x,p)$, on parvient à la solution générale à l'aide des transformées inverses données par les tables de transformées (voir annexe tableau 3.1).

a. Milieu semi-infini : problème de choc thermique

Un milieu semi infini est milieu dont les dimensions sont suffisamment grandes pour que les perturbations thermiques que ce soit une densité de flux ou une température appliquée sur l'une de ses faces ne se fassent pas ressentir sur l'autre. En pratique, les solutions pour un milieu semi-infini sont utilisées quand le transfert de chaleur est limité à une faible épaisseur du matériau considéré.

a.1. Milieu semi-infini : Température imposée à la surface T(0,t) = Cte = T_s

Le processus est illustré sur la figure 3.5, il s'agit d'un corps semi-infini qui est initialement à une température uniforme T_i supposée froide. A l'instant t = 0, la température de la surface est exposée soudainement à un saut de température constante T_s. Plus le temps avance, plus la température va s'élever profondément dans le milieu.

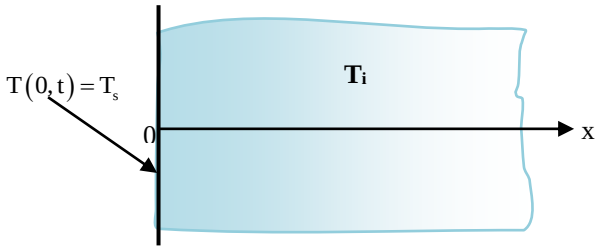


Figure 3.5 : Schéma d'un milieu semi-infini.

L'équation différentielle gouvernante et les conditions aux limites et initiales sont données par le modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0 \\ T(x,0) = T_i \\ T(0,t) = T_s \\ T(\infty,t) = T_i \end{cases} \qquad (3.19)$$

Effectuons le changement de variables suivant : $\theta(x,t) = T(x,t) - T_i$, le système (3.19) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}=0 \\ \theta(x,0)=0 \\ \theta(0,t)=T_s-T_i \\ \theta(\infty,t)=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Tansfromée de Laplace}]{} \begin{cases} \dfrac{d^2\theta(x,p)}{dx^2}-\dfrac{p}{a}\theta(x,p)=0 \\ \theta(0,p)=\dfrac{T_s-T_i}{p} \\ \theta(\infty,p)=0 \end{cases} \quad (3.20)$$

La solution générale est donnée par : $\theta(x,p)=C_1\exp\left(-\sqrt{\dfrac{p}{a}}x\right)+C_2\exp\left(\sqrt{\dfrac{p}{a}}x\right)$ (3.21)

Les constantes C_1 et C_2 sont obtenues à partir des conditions aux limites :

à $x\to\infty$: $\theta(\infty,p)=0=C_1\exp\left(-\sqrt{\dfrac{p}{a}}\infty\right)+C_2\exp\left(\sqrt{\dfrac{p}{a}}\infty\right)\Rightarrow C_2\exp\left(\sqrt{\dfrac{p}{a}}\infty\right)=0$

Ce qui ne peut être vrai que si $C_2 = 0$.

D'où la solution générale devient : $\theta(x,p)=C_1\exp\left(-\sqrt{\dfrac{p}{a}}x\right)$ (3.22)

à $x\to 0$: $\theta(0,p)=\dfrac{T_s-T_i}{p}=C_1\exp\left(-\sqrt{\dfrac{p}{a}}0\right)\to C_1=\dfrac{T_s-T_i}{p}$

Aboutissant finalement : $\theta(x,p)=\dfrac{T_s-T_i}{p}\exp\left(-\sqrt{\dfrac{p}{a}}x\right)$ (3.23)

La solution originale θ(x,t) est donnée par la transformée inverse (voir annexe tableau 3.1) de la fonction θ(x,p), soit : $\dfrac{\theta(x,t)}{T_s-T_i}=\text{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{at}}\right)$ (3.24)

$$\frac{T(x,t)-T_i}{T_s-T_i}=\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{T(x,t)-T_s}{T_i-T_s}=\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \quad (3.25)$$

La fonction erfc est la fonction d'erreur complémentaire définie par la relation :

erfc(u) = 1 - erf(u), avec erf(u) est appelée la fonction d'erreur de Gauss définie par l'intégrale de Gauss : $\text{erf}(u)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-t^2}dt$, avec : $u=\dfrac{x}{2\sqrt{at}}$

On donne dans le tableau 3.2 (voir annexe) les valeurs de la fonction d'erreur.

Caractéristiques de la fonction d'erreur : erf (-u) = - erf (u) ; erf (0) = 0 et erf (∞) = 1

$$\frac{d(\text{erf}(u))}{du}=-\frac{d(\text{erfc}(u))}{du}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-u^2) \; ; \quad \frac{d^2(\text{erf}(u))}{du^2}=-\frac{4}{\sqrt{\pi}}u\exp(-u^2)$$

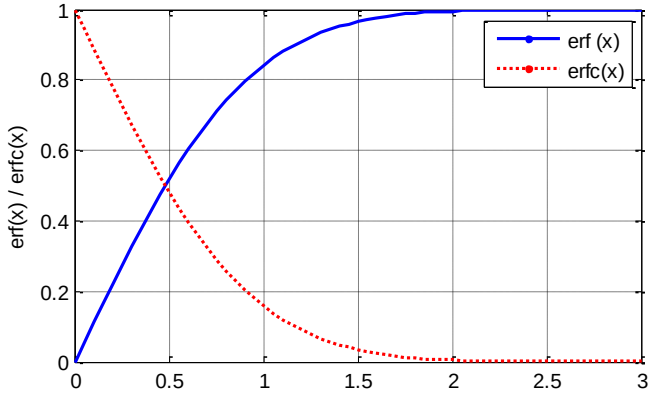


Figure 3.6 : Fonction d'erreur & fonction d'erreur complémentaire

Remarque : En pratique on peut approcher la fonction d'erreur par la fonction suivante :

$$\text{erf}(u) \approx \sqrt{1-\exp\left(\frac{-4u^2}{\pi}\right)} \qquad \text{et} \qquad u = \sqrt{\frac{\pi}{-4}\ln\left[1-\left(\text{erf}(u)\right)^2\right]}$$

Le flux thermique qui traverse la face du mur (à x = 0) s'obtient alors :

$$\Phi_{x=0} = -\lambda S\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = (T_s - T_i)S\left(\frac{\lambda\rho C_p}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} = bS\frac{(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi t}} = \lambda S\frac{(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi a t}} \qquad (3.26)$$

Avec $b = \sqrt{\lambda\rho C_p}$ est appelée effusivité thermique du matériau

Quant à l'énergie (en J) qui a pénétré dans le mur, au temps t, elle se calcule par :

$$Q = \int_0^t \Phi dt = \int_0^t \lambda S\frac{T_s - T_i}{\sqrt{\pi a t}}dt = 2\lambda S(T_s - T_i)\sqrt{\frac{t}{\pi a}} \qquad (3.27)$$

Exemple 3.2 : Une plaque épaisse d'acier est initialement à une température de 25 °C. Lorsque la plaque est exposée à des fumées chaudes, la température de sa surface (en x = 0) est portée brusquement à 450 °C. Calculer la température à une profondeur de 25 cm de la surface après 5 heures. Quelle est au même temps le flux et l'énergie totale transmissent par unité de surface (en x = 0). On admet pour l'acier : λ = 45 W/m.K, ρ = 8000 kg/m^3, et C_p = 480 J/kg.K

Solution: T_i = 25 °C, T_s = 450 °C, t = 5 heures × 3600 s = 18000 s, S = 1 m^2

Le profil de température dans la plaque a pour expression : $\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$

Calculons d'abord la diffusivité thermique : $a = \frac{\lambda}{\rho C_p} = \frac{45}{8000\times 480} = 1.17\times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}$

$$T(x,t) = T_s + (T_i - T_s)\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \rightarrow T(x,t) = 450 + (25 - 450)\text{erf}\left(\frac{0.25}{2\sqrt{1.17\times 10^{-5}\times 18000}}\right)$$

$T(x,t) = 450 + (25 - 450)\text{erf}(0.27)$. A partir du tableau de la fonction d'erreur (annexe : tableau 3.2) : erf (0.27) ≈ 0.297. On peut également utiliser l'approximation :

$$\text{erf}(u) \approx \sqrt{1-\exp\left(\frac{-4u^2}{\pi}\right)} = \sqrt{1-\exp\left(\frac{-4\times(0.27)^2}{\pi}\right)} \approx 0.297$$

D'où : $T(28\,\text{cm}, 5\text{h}) = 450 + (25 - 450)\times 0.297 = 323.775\,°\text{C}$

Le flux thermique à la surface est donné par l'équation (3.26) : $\Phi = \lambda S\frac{(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi a t}} = 23518.38$ W

L'énergie totale transmise par unité de surface est donnée par l'équation (3.27) :

$$Q = 2\lambda S(T_s - T_i)\sqrt{\frac{t}{\pi a}} = 2\times 45(450 - 25)\sqrt{\frac{18000}{3.14\times 1.17\times 10^{-5}}} = 846.66\times 10^6\ \text{J}$$

a.2. Milieu semi-infini : Densité de flux constante imposée φ = Cte : dans ce cas, le profil de température T(x,t) est donnée par :

$$T(x,t) - T_i = \frac{\varphi}{\lambda}\left[\sqrt{\frac{4at}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - x\,\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right] \qquad (3.28)$$

Exemple 3.3 : On considère un mur, initialement à une température uniforme de T_i = 5 °C. Ce mur est exposé de 9:00 à midi à un éclairement solaire égal à 650 W/m^2 dont 40 % est absorbé. Déterminer la température de surface et la température à une profondeur de 4 cm.

On donne : λ = 0.552 W/m.K et a = 8.26×10^{-7} m^2/s.

Solution : t = 3×3600 s, φ = 0.4×650 W/m^2 (40 % du flux solaire est absorbé)

✓ Calcul de la température à la surface (en x = 0)

$$T(0,t)-5=\frac{0.4\times650}{0.552}\left[\sqrt{\frac{4\times8.26\times10^{-7}.10800}{3.14}}\exp(0)-0\times\operatorname{erfc}(0)\right]\Rightarrow T(0,t)=T_s=55.21°C$$

✓ Calcul de la température à une profondeur x = 0.04 m :

$$T(0.04,t)-5=\frac{0.4\times650}{0.552}\left[\sqrt{\frac{4\times8.26\times10^{-7}\times10800}{3.14}}\exp\left(-\frac{0.04^2}{4\times8.26\times10^{-7}\times10800}\right)-0.04\left(1-\operatorname{erf}\left(\frac{0.04}{2\sqrt{8.26\times10^{-7}\times10800}}\right)\right)\right]$$

À l'aide du tableau de la fonction d'erreur : erf(0.21) = 0.233522 $\Rightarrow T(0.04,t)=38.56$ °C

a.3. Milieu semi-infini : Flux convectif φ=h[T∞ - T(0, t)] : si la surface est soumise à un flux convectif à une température « T∞ » et un coefficient d'échange « h », l'expression donnant la distribution de température dans le mur est :

$$\frac{T(x,t)-T_i}{T_\infty-T_i}=\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)-\exp\left(\frac{hx}{\lambda}+\frac{h^2at}{\lambda^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}+\frac{h\sqrt{at}}{\lambda}\right) \qquad (3.29)$$

Exemple 3.4 : On soumet une plaque épaisse d'aluminium, à une condition de flux convectif a sa surface dont la température du fluide et le coefficient d'échange par convection sont respectivement T∞ = 25 °C et h = 150 W/m^2.K. La température initiale était de 250 °C. Quelle est alors la température de la plaque à une profondeur de 5 cm sous la surface après 10 minutes.
On donne : λ = 230 W/m.K et a = 9.465×10^{-5} m^2/s.

Solution: T_i = 250 °C, T∞ = 450 °C, t = 10 minutes × 60 s = 600 s.

En utilisant la caractéristique de la fonction d'erreur : erfc(u) = 1 - erf(u). L'équation (3.29) peut se mettre sous la forme : $\frac{T(x,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\operatorname{erf}(u)-\exp\left(\frac{hx}{\lambda}+\frac{h^2at}{\lambda^2}\right)\left[1-\operatorname{erf}(v)\right]$

Avec : $u=\frac{x}{2\sqrt{at}}$ et $\frac{x}{2\sqrt{at}}+\frac{h\sqrt{at}}{\lambda}\rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{0.05}{2\sqrt{9.465\times10^{-5}\times600}}=0.105\\ v=\dfrac{0.05}{2\sqrt{9.465\times10^{-5}\times600}}+\dfrac{150\sqrt{9.465\times10^{-5}\times600}}{230}=0.26\end{cases}$

A partir du tableau de la fonction d'erreur (annexe : tableau 3.2) : erf (0.105) ≈ 0.118, et erf (0.26) ≈ 0.286. On peut également utiliser l'approximation :

$$\begin{cases}\operatorname{erf}(u)\approx\sqrt{1-\exp\left(\dfrac{-4u^2}{\pi}\right)}=\sqrt{1-\exp\left(\dfrac{-4\times(0.105)^2}{\pi}\right)}\approx0.118\\ \operatorname{erf}(v)\approx\sqrt{1-\exp\left(\dfrac{-4v^2}{\pi}\right)}=\sqrt{1-\exp\left(\dfrac{-4\times(0.26)^2}{\pi}\right)}\approx0.286\end{cases}$$

Il vient donc : $\frac{T(x,t)-25}{250-25}=0.118-\exp\left(\frac{150\times0.05}{230}+\frac{(150)^2\,9.465\times10^{-5}\times600}{(230)^2}\right)\left[1-0.286\right]$

D'où : $T(x,t)=221.58°C$

3.3.1.2. Méthode de séparation des variables

La méthode de séparations de variables est basée sur la recherche d'une solution particulaire, satisfaisant à l'équation 3.2 et de la forme :

$$T(x,t) = f(x).g(t) \tag{3.30}$$

On remplace l'équation 3.31 dans l'équation de la chaleur, ensuite nous séparons l'équation obtenue pour trouver deux fonctions : une première qui dépend seulement de « x » et l'autre qui dépend seulement de « t », soit :

$$f''(x).g(t) = \frac{1}{a} f(x) g'(t) \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{a}\frac{g'(t)}{g(t)} \tag{3.31}$$

En introduisant une constante de séparation ($\alpha \in R$ & $\beta \in C$), cela nous permet d'avoir les deux systèmes d'équations différentielles ordinaires suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{f''(x)}{f(x)} = \alpha \\ \dfrac{1}{a}\dfrac{g'(t)}{g(t)} = \alpha \end{cases} \tag{3.32}$$

Le choix de la constante « α » se fait selon des considérations physiques.

Considérons le cas d'un processus thermique tendant vers une distribution constante de la température à l'équilibre, dans ce cas, la constante « α » doit prendre une valeur réelle négative ($\alpha < 0$) car une valeur positive implique que la fonction g(t) croit indéfiniment avec le temps pour être infini, ce qui est physiquement absurde. Par ailleurs, une valeur nulle de la constante « α » conduit à une indépendance temporelle, ce qui est de nouveau incompatible avec le problème physique.

Cas1 : $\alpha = 0$ alors, $\begin{cases} g(t) = C_1 \\ f(x) = C_2 x + C_3 \end{cases} \Rightarrow T(x,t) = C_1(C_2 x + C_3)$ (3.33)

Cas 2 : α est positif ($\alpha > 0$), soit $\alpha = k^2$ alors,

$$\begin{cases} g(t) = C_1 e^{ak^2 t} \\ f(x) = C_2 e^{kx} + C_3 e^{-kx} \end{cases} \Rightarrow T(x,t) = C_1 e^{ak^2 t}\left(C_2 e^{kx} + C_3 e^{-kx}\right) \tag{3.34}$$

Cas 3 : α est négatif ($\alpha < 0$), soit $\alpha = -k^2$ alors,

$$\begin{cases} g(t) = C_1 e^{-ak^2 t} \\ f(x) = C_2 \cos kx + C_3 \sin kx \end{cases} \Rightarrow T(x,t) = C_1 e^{-ak^2 t}\left(C_2 \cos kx + C_3 \sin kx\right) \tag{3.35}$$

Les constantes k, C_1, C_2 et C_3 sont déterminés à l'aide des conditions aux limites et initiales.

a. Milieu finis : Température imposée à la surface

On cherche à trouver la distribution de température à l'intérieur d'un mur d'épaisseur « L » et de diffusivité thermique « a », initialement à une température $T(x,0) = f(x)$ et exposée à ses limites x = 0 et x = L aux conditions de Dirichlet telles que T (0,t) = T(L,t) = 0. Le profil de température vérifier donc le modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ \\ T(0,t) = T(L,t) = 0 \\ T(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Avec : $f(x) = T_i = 10$ Constante ; $f(x) = 6\sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)$ et $f(x) = 12\sin\left(\dfrac{9\pi x}{L}\right) - 7\sin\left(\dfrac{4\pi x}{L}\right)$

- La première condition aux limites nous permet d'écrire :

$T(0,t) = 0 = C_1 e^{-ak^2 t}\left(C_2\cos 0 + C_3 \sin 0\right) \Rightarrow C_2 = 0$, La solution devient : $T(x,t) = Ae^{-ak^2 t}\sin kx$

- La deuxième condition aux limites donne : $T(L,t) = Ae^{-ak^2 t}\sin kL = 0 \rightarrow \sin kL = 0 \rightarrow k = \dfrac{n\pi}{L}$

On peut remarquer qu'il existe un nombre infini de valeurs de « k » qui satisferont à ces conditions, c'est-à-dire : $k_n = \left(n\pi / L\right)$ n=1,2,3….

Les k_n et $\sin(k_n x)$ sont respectivement, les valeurs propres et les fonctions propres satisfaites par la fonction *f*(*x*). Chaque valeur de « k_n » donne une solution indépendante T(x,t) pour n = 1,2,3… satisfaisant l'équation de la chaleur ainsi que les deux conditions aux limites.

Par conséquent, le principe de superposition permet de créer une solution plus générale à partir des solutions particulières par simple combinaison linéaire pour donner :

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

L'étape finale consiste à s'assurer que les valeurs des constantes « A_n » satisferont à la condition initiale, c'est-à- dire : $T(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.1.\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$

Pour déterminer les valeurs de la constante « A_n » on peut utiliser la procédure de développement du théorème de Fourier : On multiplie les deux côtés de l'équation par $\sin(m\pi x/L)$ et on intègre entre x = 0 et x = L :

$$\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$$

L'intégrale de droite est nulle pour toutes les valeurs de « n » sauf pour n = m tel que :

$\int_0^L \sin\left(\dfrac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} L/2 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$ d'où on obtient : $A_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)dx \quad n = 1,2,3,....$

✓ Pour le premier cas, la constante A_n est :

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L T_i \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\left(\frac{T_i L\left(1-\cos n\pi\right)}{n\pi}\right) = T_i\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}$$

On obtient finalement : $T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_i \dfrac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)e^{-a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$

✓ Pour le deuxième cas, la solution générale est : $T(x,t) = 6\sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)e^{-a\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t}$

✓ Pour le troisième cas : $T(x,t) = 12\sin\left(\dfrac{9\pi x}{L}\right)e^{-a\left(\frac{9\pi}{L}\right)^2 t} - 7\sin\left(\dfrac{4\pi x}{L}\right)e^{-a\left(\frac{4\pi}{L}\right)^2 t}$

3.3.2. Méthodes numériques (méthode des différences finies)

Les méthodes analytiques sont adoptées aux problèmes dont la géométrie et les conditions aux limites sont simples, leur avantage est de fournir des solutions exactes. Si la géométrie du système ainsi que les conditions aux limites sont complexes, les méthodes numériques sont recommandées.

Contrairement aux méthodes analytiques qui permettent la détermination de la température en tout point du domaine (solutions exactes), les méthodes numériques consistent à déterminer la température qu'aux des points discrets. Il existe trois grandes familles de méthodes : La plus ancienne, la méthode aux différences finies basé sur une approximation de l'opérateur différentiel. La seconde catégorie de méthodes numériques regroupe les méthodes dites variationnelles. Elles sont très répandues et doivent leur succès au fait que l'approximation est faite sur l'inconnue et non plus sur l'opérateur. La méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis font partie de cette catégorie. Dans le cadre de ce cours nous allons nous intéresser particulièrement à la méthode des différences finies.

Le principe de la méthode des différences finies consiste à transformer la fonction inconnue dans notre cas T(x,t), équation continue sur un domaine continu en un nombre fini de valeurs « T_i » associées à un domaine discret appelé le maillage ou grille de calcul (voir figure 3.5). L'objectif étant de calculer ces valeurs discrètes « T_i » comme étant une bonne approximation de $T(x_i)$, valeur de la solution exacte aux points de discrétisation, « x_i » appelé nœud. Autrement dit, l'équation de la chaleur sera transformée en équation algébrique. Cette équation algébrique est ensuite appliquée sur l'ensemble des nœuds.

Le résultat final, est un système d'équations algébriques qui sera résolu ensuite par une méthode appropriée (méthodes directes ou itératives)

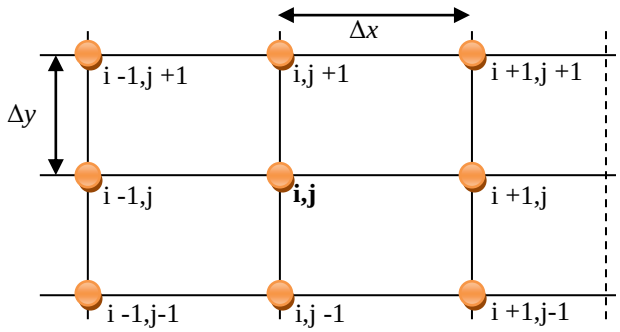


Figure 3.5 : Maillage structuré 2D.

La formulation de la méthode des différences finies est basé donc sur l'approximation des fonctions dérivées T(x,t) par des fonctions polynomiales données par le développement en série de Taylor, soit :

$$T(x+\Delta x,y)=T_{i+1,j}=T_{i,j}+\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|\Delta x_i+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_i\frac{\Delta x^2}{2!}+\ldots+\left.\frac{\partial^n T}{\partial x^n}\right|_i\frac{\Delta x^n}{n!} \tag{3.36}$$

$$T(x-\Delta x,y)=T_{i-1,j}=T_{i,j}-\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|\Delta x_i+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_i\frac{\Delta x^2}{2!}-\ldots+\left.\frac{\partial^n T}{\partial x^n}\right|_i\frac{\Delta x^n}{n!} \tag{3.37}$$

En combinant de différentes manières ces deux équations, on obtient les approximations discrètes suivantes :

- Schéma décentrée à droite : $$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_i=\frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\Delta x}+O(\Delta x) \tag{3.38}$$

- Schéma décentrée à gauche : $$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_i = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.39)$$
- Schéma centrée : $$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_i = \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.40)$$
- De la même manière on peut obtenir la deuxième dérivée :

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_i = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3.41)$$

Exemple 3.5 : Considérons à nouveau la conduction thermique 1D stationnaire dans un milieu passif assimilable à une barre en acier (λ = 54 W/m.K, ρ = 7800 Kg/m^3, C_p = 490 J/Kg.K) dont le champ de température T(x,t) vérifie le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \\ T(0) = 100\,°C \\ T(L) = 25\,°C \end{cases}$$

Solution :

✓ **La première étape : génération du maillage :** Il s'agit de subdiviser le domaine en de sous domaines. Le nœud général est identifié par « i », et les nœuds adjacents c'est-à-dire l'est et l'ouest sont identifiés par « i-1 » et « i+1» respectivement. On considère un maillage à 6 nœuds (N = 6).

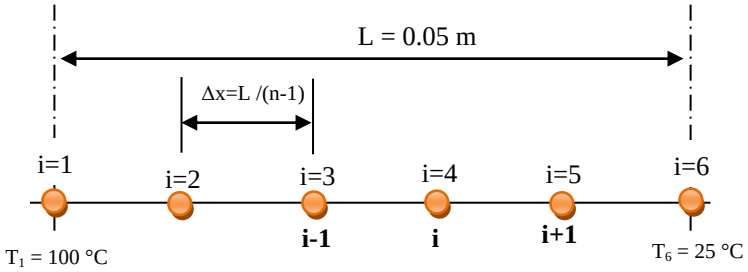


Figure 3.6 : Maillage de calcul structuré 1D.

✓ **La deuxième étape : discrétisation :** L'objectif ici est d'éliminer de l'équation de la chaleur, toutes les dérivées et les remplacer par des expressions faisant intervenir les valeurs discrètes de notre inconnue T(x). En approchant la dérivée seconde par un schéma aux différences finies centrée (équation 3.41), on obtient :

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} = 0$$

Cette équation discrète, n'est cependant applicable qu'aux nœuds internes 2, 3, 4 et 5. Au total, nous avons quatre inconnues auxquelles vient s'ajouter les deux conditions frontières. Nous sommes donc passés d'une équation différentielle continue à un système algébrique discret, de (N-1) équations à (N-1) inconnues. Les inconnues sont les valeurs (T_2,T_3,..,T_{N-1}).

L'application de l'équation discrète aux quatre nœuds internes donne le système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{aligned} i=2 \quad & T_1\text{-}2T_2 + T_3 = 0 \\ i=3 \quad & T_2\text{-}2T_3 + T_4 = 0 \\ i=4 \quad & T_3\text{-}2T_4 + T_5 = 0 \\ i=5 \quad & T_4\text{-}2T_5 + T_6 = 0 \end{aligned}$$ sous la forme matricielle : $$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Il s'agit donc d'un système tri-diagonale facilement résolue par la méthode du pivot (triangulation) ou la méthode TDMA (Three Diagonal Matrix Algorithm) appelé également méthode de Thomas. Notons que cette dernière méthode est la plus appropriée à ce genre de matrice. La résolution donne : $T_2 = 85\,°C$, $T_3 = 70\,°C$, $T_4 = 55\,°C$, $T_5 = 40\,°C$.

Rappelons que la solution analytique est de la forme (voir chapitre 1, équation 1.32) :

$$T(x) = \frac{T_6 - T_1}{L} x + T_1$$

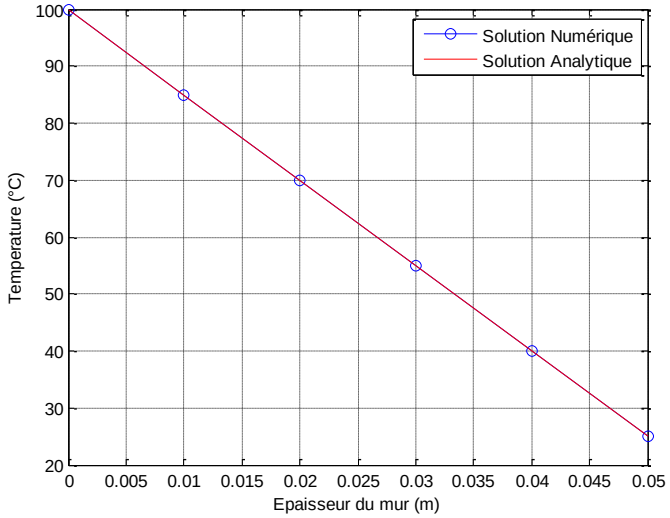


Figure 3.7 : Evolution de température le long de la barre

En ce qui concerne la conduction transitoire, le temps est aussi discrétisé en intervalles de pas constant « Δt ». Notons « T^n_i » la température au nœud $x_i = (i-1)\Delta t$ et à l'instant $t = n\Delta t$. On peut utiliser trois approches pour discrétiser l'équation de la chaleur. La première dite explicite utilise une discrétisation au nœud « x_i » à l'itération courante « n », la seconde dite implicite utilise une discrétisation au nœud « x_i » à l'itération « n+1» et la troisième dite schéma généralisé ou schéma de Crank-Nicholson.

3.3.2.1. Schéma explicite

Lors de cette discrétisation nous allons exprimer le Laplacien à l'aide des valeurs connues de la température au temps « t ». Ce schéma s'appelle un schéma **explicite**, puisqu'il permet de formuler l'expression de température au point « i » à l'instant « t+Δt » explicitement en fonction de la température déjà calculée au temps « t ». L'équation de la chaleur discrétisée s'écrit alors :

$$a\frac{T^n_{i+1} - 2T^n_i + T^n_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{T^{n+1}_i - T^n_i}{\Delta t} \tag{3.42}$$

La température à l'itération « n+1 » est donnée par :

$$T^{n+1}_i = T^n_i + a\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(T^n_{i+1} - 2T^n_i + T^n_{i-1}\right) \tag{3.43}$$

Cette expression est valable uniquement pour les nœuds internes i = 2,3, … (N-1). Elle peut être réarrangé sous la forme :

$$T_i^{n+1} = F_0 T_{i-1}^n + (1-2F_0) T_i^n + F_0 T_{i+1}^n \qquad (3.44)$$

F_0 : est le nombre de Fourier, égale à $F_0 = \dfrac{a\Delta t}{\Delta x^2} \geq \dfrac{1}{2}$ et représente le critère de stabilité pour les schémas explicites.

Exemple 3.6 : Utiliser la méthode explicite pour trouver la distribution de température dans la barre de l'exemple précédent de t = 0 et t = 9 s, Δt = 3 s. La température initiale de la barre est estimée à 20 °C.

Solution : Le nombre de Fourier vaut : $F_0 = a\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 0.4239$, pas de temps $= \dfrac{t_{final} - t_{initial}}{\Delta t} = 3$

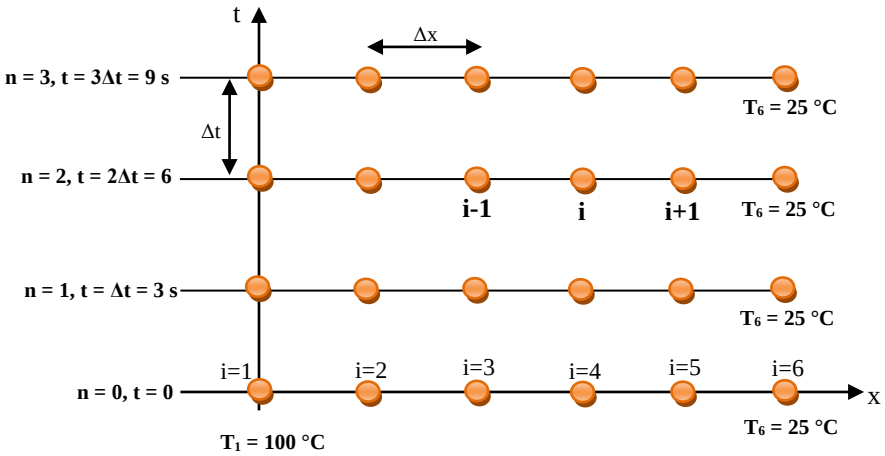


Figure 3.8 : Maillage de calcul structuré 1D.

La température initiale de la barre est 20°C, cela veut dire que toutes les températures des nœuds internes de la barre sont à 20 °C à l'instant t = 0 s ($T_i^0 = 20°C,\ i = 2,3,4,5$), tandis que les températures des nœuds frontières restent invariables de sorte que :

$$\left.\begin{aligned} T_1^n &= 100°C \\ T_6^n &= 25°C \end{aligned}\right\} \quad n = 1,2,3...$$

Après la substitution des valeurs numériques, on récapitule dans le tableau suivant les calculs pour les trois valeurs de pas de temps.

	Nœud 1	**Nœud 2**	**Nœud 3**	**Nœud 4**	**Nœud 5**	**Nœud 6**
	x=0m	x=0.01m	x=0.02m	x=0.03m	x=0.04m	x=0.05m
n=0 t=0	$T_1^0 = 100$	$T_2^0 = 20$	$T_3^0 = 20$	$T_4^0 = 20$	$T_5^0 = 20$	$T_6^0 = 25$
n=1 t=Δt =3s	$T_1^1 = 100$	$T_2^1 = T_2^0 + F_0(T_3^0 - 2T_2^0 + T_1^0)$ $= 20 + 0.4239(20 - 2(20) + 100)$ $= 53.912$	$T_3^1 = T_3^0 + F_0(T_4^0 - 2T_3^0 + T_2^0)$ $= 20 + 0.4239(20 - 2(20) + 20)$ $= 20$	$T_4^1 = T_4^0 + F_0(T_5^0 - 2T_4^0 + T_3^0)$ $= 20 + 0.4239(20 - 2(20) + 20)$ $= 20$	$T_5^1 = T_5^0 + F_0(T_6^0 - 2T_5^0 + T_4^0)$ $= 20 + 0.4239(25 - 2(20) + 20)$ $= 22.120$	$T_6^1 = 25$
	$T_1^1 = 100$	$T_2^1 = 53.912$	$T_3^1 = 20$	$T_4^1 = 20$	$T_5^1 = 22.120$	$T_6^1 = 25$
n=2 t=2Δt =6s	$T_1^2 = 100$	$T_2^2 = T_2^1 + F_0(T_3^1 - 2T_2^1 + T_1^1)$ $= 53.912 + 0.4239(20 - 2(53.912) + 100)$ $= 59.073$	$T_3^2 = T_3^1 + F_0(T_4^1 - 2T_3^1 + T_2^1)$ $= 20 + 0.4239(20 - 2(20) + 53.912)$ $= 34.375$	$T_4^2 = T_4^1 + F_0(T_5^1 - 2T_4^1 + T_3^1)$ $= 20 + 0.4239(22.120 - 2(20) + 20)$ $= 20.899$	$T_5^1 = T_5^1 + F_0(T_6^1 - 2T_5^1 + T_4^1)$ $= 22.120 + 0.4239(25 - 2(22.120) + 20)$ $= 22.442$	$T_6^2 = 25$
	$T_1^2 = 100$	$T_2^2 = 59.073$	$T_3^2 = 34.375$	$T_4^2 = 20.899$	$T_5^2 = 22.442$	$T_6^2 = 25$
n=3 t=3Δt =9s	$T_1^3 = 100$	$T_2^3 = T_2^2 + F_0(T_3^2 - 2T_2^2 + T_1^2)$ $= 59.073 + 0.4239(34.375 - 2(59.073) + 100)$ $= 65.953$	$T_3^3 = T_3^2 + F_0(T_4^2 - 2T_3^2 + T_2^2)$ $= 34.375 + 0.4239(20.899 - 2(34.375) + 59.073)$ $= 39.132$	$T_4^3 = T_4^2 + F_0(T_5^2 - 2T_4^2 + T_3^2)$ $= 20.899 + 0.4239(22.442 - 2(20.899) + 34.375)$ $= 27.266$	$T_5^3 = T_5^2 + F_0(T_6^2 - 2T_5^2 + T_4^2)$ $= 22.442 + 0.4239(25 - 2(22.442) + 20.899)$ $= 22.872$	$T_6^3 = 25$
	$T_1^3 = 100$	$T_2^3 = 65.953$	$T_3^3 = 39.132$	$T_4^3 = 27.266$	$T_5^3 = 22.872$	$T_6^3 = 25$
n=54 t=54Δt =162s	$T_1^{54} = 100$	$T_2^{54} = 84.997$	$T_3^{54} = 69.996$	$T_4^{54} = 54.996$	$T_5^{54} = 39.997$	$T_6^{54} = 25$

Pour mieux visualiser la variation de la température dans chaque nœud, la figure suivante présente la distribution de température le long de la barre :

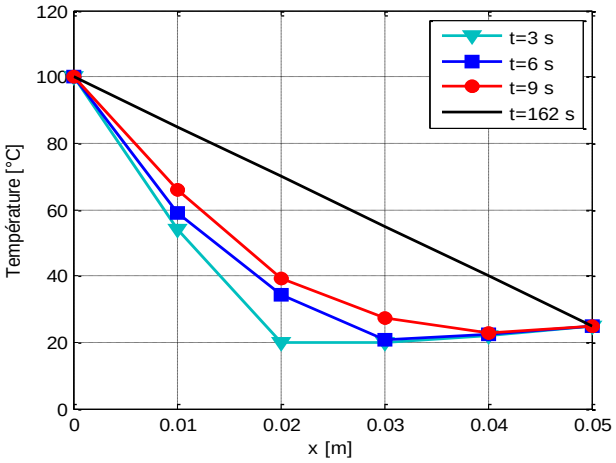


Figure 3.9 : Profil de température dans la barre

La génération interne de chaleur peut également être prise en charge. L'équation 3.2 peut se mettre sous la forme :

$$T_i^{n+1} = F_0\left[T_{i-1}^n + T_{i+1}^n - \left(2 - \frac{1}{F_0}\right)T_i^n + \frac{P\Delta x^2}{\lambda}\right] \tag{3.45}$$

- **Cas des nœuds particuliers situés aux frontières :** supposons le cas où on à un échange convectif sur l'une des faces (voir figure 3.10).

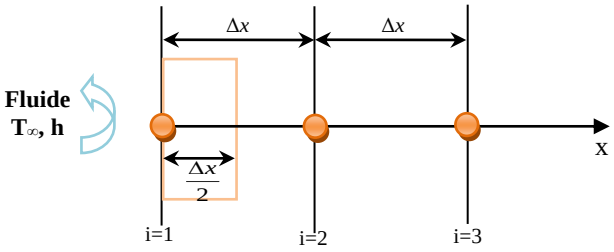


Figure 3.10 : Nœud de frontière avec un flux convectif

Faisons le bilan thermique pour un élément de volume entourant le nœud « 1 » de surface unitaire normale à « x » et d'épaisseur « $\Delta x/2$ » :

$$hS\left(T_\infty - T_1^n\right) + \frac{\lambda S}{\Delta x}\left(T_2^n - T_1^n\right) = \rho\frac{\Delta x}{2}SC_p\left(\frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta t}\right) \tag{3.46}$$

On pose $\frac{h\Delta x}{\lambda} = Bi$ et $\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} = F_0$ on obtient après regroupement et réarrangement :

$$T_1^{n+1} = 2F_0BiT_\infty + 2F_0T_2^n + \left(1 - 2F_0 - 2F_0Bi\right)T_1^n \tag{3.47}$$

Avec : $1 - 2F_0 - 2F_0Bi \geq 0$, est la condition de stabilité.

3.3.2.2. Schéma implicite

Nous avons conclu que la méthode explicite ne garantit pas la stabilité qui dépend de la valeur du pas de temps, du pas d'espace et les paramètres thermophysiques de l'équation de la chaleur. Ces questions sont abordées en utilisant la méthode implicite avec laquelle le Laplacien est exprimé à l'aide des valeurs inconnues de la température aux nœuds internes i = 1, 2,... (N-1).

L'équation (3.2) à pour expression donc :

$$\frac{T_{i+1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1}}{\Delta x^2} = \frac{1}{a}\frac{T_i^n - T_i^n}{\Delta t} \tag{3.48}$$

En définitif : $$\left(1+2F_0\right)T_i^{n+1}-F_0T_{i+1}^{n+1}-F_0T_{i-1}^{n+1}=T_i^n \qquad (3.49)$$

Cette équation est valable pour les nœuds internes et comporte trois inconnues à la fois. Le schéma implicite donne lieu à des équations linéaires simultanées pour un temps particulier ce qui ne permet pas de la résoudre directement comme on a vu pour le schéma explicite. Pour trouver la solution, il faut écrire l'ensemble des équations et ensuite résoudre le système tout entier. Si nous reprenons l'exemple précédent, le système d'équations s'écrits :

$$\begin{aligned}
&i=2:\left(1+2F_0\right)T_2^{n+1}-F_0T_3^{n+1}-F_0T_1^{n+1}=T_2^n\\
&i=3:\left(1+2F_0\right)T_3^{n+1}-F_0T_4^{n+1}-F_0T_2^{n+1}{}_0=T_3^n\\
&i=4:\left(1+2F_0\right)T_4^{n+1}-F_0T_5^{n+1}-F_0T_3^{n+1}=T_4^n\\
&i=5:\left(1+2F_0\right)T_5^{n+1}-F_0T_6^{n+1}-F_0T_4^{n+1}=T_5^n
\end{aligned}
\quad \text{soit :} \quad
\begin{bmatrix}
\left(1-2F_0\right) & -F_0 & 0 & 0\\
-F_0 & \left(1-2F_0\right) & -F_0 & 0\\
0 & -F_0 & \left(1-2F_0\right) & -F_0\\
0 & 0 & -F_0 & \left(1-2F_0\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
T_2^{n+1}\\ T_3^{n+1}\\ T_4^{n+1}\\ T_5^{n+1}
\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
T_2^n+F_0T_1^{n+1}\\ T_2^n\\ T_4^n\\ T_5^n+F_0T_6^{n+1}
\end{bmatrix}$$

On dispose alors d'un système d'équations algébriques de 4 équations à 4 inconnues :

T_1^{n+1} et T_6^{n+1} sont connues (conditions aux limites).

Remarque : La méthode implicite est stable pour toutes valeurs de « F_0 » (schéma inconditionnellement stable), par conséquent on peut choisir les incréments « Δx » et « Δt » indépendamment l'une de l'autre.

3.3.2.3. Schéma généralisé

D'une façon générale il est également possible d'exprimer le Laplacien par une combinaison de deux termes l'un calculé à partir des valeurs T_i^n, l'autre à partir des valeurs T_i^{n+1} pour un nœud interne, nous obtenons alors l'équation aux différences finies suivantes :

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[\beta\left(T_{i+1}^n+T_{i-1}^n-2T_i^n\right)+\left(1-\beta\right)\left(T_{i+1}^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}-2T_i^{n+1}\right)\right]=\frac{1}{a.\Delta t}\left(T_i^{n+1}-T_i^n\right) \quad 0\le\alpha\le1 \qquad (3.50)$$

On peut distinguer : $\beta = 0$: Méthode implicite.
$\beta = 1$: Méthode explicite.
$\beta = 1/2$: Méthode de Crank-Nicholson.

3.4. Exercices sur le chapitre

Exercice 01 : On considère une sphère en aluminium de 5 cm de rayon, initialement à une température de 290 °C. Cette sphère est mise brusquement en contact avec de l'air à la température de 16 °C. Déterminer l'évolution de la température de la sphère au bout de 2 heures. On donne pour l'aluminium : $\rho = 2700$ kg/m^3 ; $C_p = 900$ J/kg.K ; $\lambda = 230$ W/m.K; $h = 6$ W/m^2.K

Solution : $T_i = 290\ °C$, $t = 2\,\text{heures} = 7200\ s$, $T_\infty = 16\,°C$

On calcule d'abord le nombre de Biot : $Bi = \dfrac{hL}{\lambda}$

La dimension caractéristique est calculée par : $L = \dfrac{V}{S} = \dfrac{(4/3)\pi r^3}{4\pi r^2} = \dfrac{r}{3} = \dfrac{D}{6} = 1.66\ \text{cm}$

Le nombre de Biot : $Bi = \dfrac{6\times1.66\times10^{-2}}{230} = 4.33\times10^{-4} \le 0.1 \rightarrow$ ***système thermique mince***

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$, $\dfrac{-hS}{\rho C_p V} = BiF_0$, avec : $F_0 = \dfrac{at}{L^2}$ est le nombre de Fourier

$a = \dfrac{\lambda}{\rho C_p} = 9.465\times10^{-5}\ m^2/s \rightarrow F_0 = \dfrac{9.465\times10^{-5}}{\left(1.66\times10^{-2}\right)^2}t = 0.343t$

Au bout de t = 2 heures, la température est donc : $T(t) = T_\infty + (T_i - T_\infty)\exp(-BiF_0)$

$$T(t) = 16 + (290 - 16)\exp\left(-\left(4.33\times10^{-4}\right)(0.343\times7200)\right) = 110\ °C$$

Exercice 02 : Dans une expérience, on plonge dans un bain de glace un cylindre d'aluminium de 2.5 cm de diamètre, préalablement chauffé à la température uniforme de 40 °C. Après 5 minutes, on mesure la température du cylindre, on obtient la valeur de 5 °C. Estimer la valeur du coefficient d'échange convectif entre le cylindre et le bain de glace. On donne pour l'aluminium : ρ = 2700 kg/m^3 ; C_p = 900 J/kg.K ; λ = 230 W/m.K;

Solution : D = 2.5 cm = 0.025 m, $T_i = 40\ °C$, $t = 5\,min = 300\,s$, $T_\infty = 0\ °C$

$L = \dfrac{V}{S} = \dfrac{\pi r^2 l}{2\pi r l} = \dfrac{r}{2} = \dfrac{D}{4} = 0.00625\ m \rightarrow$ ***système thermique mince***

$Bi = \dfrac{hL}{\lambda}$ et $\dfrac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = e^{-\frac{hS}{\rho C_p V}t} \Rightarrow \ln\left(\dfrac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right) = -\dfrac{hS}{\rho C_p V}t$, d'où, on peut tirer la valeur de h : $h = -\dfrac{\rho C_p V}{St}\ln\left(\dfrac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right) \Rightarrow h = -\dfrac{2700\times900}{300}\times\dfrac{0.025}{4}\underbrace{\ln\left(\dfrac{5-0}{40-0}\right)}_{-2,0794} \approx 105,269\ W/m^2.°C$

Exercice 03 : Un cadavre est découvert à 16 h sur le sol d'une pièce dont la températures et le coefficient d'échange par convection sont respectivement : T_∞ = 16 °C, h = 6 W/m^2.°C. La température corporelle du cadavre est estimée de 23 °C. La victime est de 90 cm de taille et pesant 25 kg. Déterminer l'heure de son décès.

On donne : Le corps humain est composé de 72 % d'eau, nous pouvons donc supposer que le cadavre a les propriétés de l'eau à la température moyenne (37+16 / 2) = 26.5 °C :

C_p = 4180 J/kg.°C, ρ = 998 kg/m^3, λ = 0.630 Wm.°C (tableau 4.1)

La surface corporelle est calculée par la formule de Mosteller : $S = \left(\dfrac{taille(cm)\times poids(kg)}{3600}\right)^{0.5}$

Le volume corporelle est calculé par : $V = S\times\left(\dfrac{51.44\times poids(kg)}{taille(cm)+15.3}\right)\Big/1000$

Solution : On calcul d'abord le nombre de Biot :

$S = \left(\dfrac{90\times25}{3600}\right)^{0.5} = 0.790\,m^2$ et $V = 0.790\times\left(\dfrac{51.44\times25}{90+15.3}\right)\Big/1000 = 0.0096\,m^3$ et : $L = \dfrac{V}{S} = 0.0121\,m^2$

D'où, le nombre de Biot : $Bi = \dfrac{hL}{\lambda} = \dfrac{6\times0.0121}{0.594} = 0.116 \approx 0.1 \rightarrow$ ***système thermique mince***. La constante de temps est donc : $\tau = \dfrac{\rho C_p V}{hS} = 8482.335\,s = 2.356\,h$

La variation de température pour le système a pour expression : $\dfrac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

Il vient : $t = -\tau\ln\left(\dfrac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)$ avec : T(t) = 23 °C, T_∞ = 16 °C, T_i = 37 °C (corps humain)

D'où : t = 2.59 h

Conclusion : L'heure de son décès était vers 16 – 2.59 = 13.41 h = 13 h 24 mn 36 s.

Exercice 04 : Un mur semi-infini, est initialement à la température de 430 °C. A sa face (x = 0), le mur est soudainement porté une température de 130 °C.

- Calculer le temps nécessaire pour que la température à une profondeur x = 40 mm atteigne 230 °C. Calculer la densité de flux pendant ce temps

On donne: $a = 1.45\times10^{-5}$ m²/s ; $\lambda = 46$ W/m.K

Solution : T(x,t) = 230 °C, T_i = 430 °C, T_s = 130 °C.

Le profil de température a pour expression : $\dfrac{T(x,t)-T_s}{T_i-T_s} = \text{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{at}}\right)$

- Calcul du temps nécessaire pour que la température atteigne 230 °C à x = 40 mm.

$$\frac{230-130}{430-130} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \rightarrow 0.333 = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

A partir du tableau de la fonction d'erreur (annexe : tableau 3.2) : erf (u) = 0.333 → u = 0.3. On peut également utiliser l'approximation : $u = \sqrt{\dfrac{\pi}{-4}\ln\left[1-\left(\text{erf}\,(u)\right)^2\right]}$

Il vient donc : $u = \dfrac{x}{2\sqrt{at}} \rightarrow t = \dfrac{x^2}{4u^2a} = \dfrac{(0.04)^2}{4\times(0.3)^2\times1.45\times10^{-5}} = 306.5$ s

- Calcul du flux thermique : $a = \dfrac{\lambda}{\rho C_p} \Rightarrow \rho C_p = \dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{46}{1.45\times10^{-5}} = 31.7\times10^5$

$\varphi = (T_s - T_i)\sqrt{\dfrac{\lambda\rho C_p}{\pi t}} \rightarrow \varphi = -1.167\times10^5$ W, flux négatif implique que la chaleur est perdue par le mur

Exercice 05 : Le sol initialement à la température T_i = 10 °C est recouvert d'un manteau neigeux pendant une période continue trois mois. A quelle profondeur doit-on enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque baisse de température de -10 °C n'entraine pas de gel de cette canalisation pendant la même période. Calculer la température à 0.5 m et à 1 m. Calculer également l'énergie totale évacuée par unité de surface pendant cette période.

On donne : Les propriétés moyennes du sol sont : λ = 0.657 W/m.K et $a = 3.097\times10^{-7}$ m²/s

Solution : T(x,t) = 0 °C (température de congélation de l'eau que la canalisation peut atteindre après trois mois.), T_i = 10 °C, T_s = -10 °C,

t = 3 mois × 30 jours × 24 heures × 3600 s = 7.776×10^6 s

Le profil de température dans le sol a pour expression : $\dfrac{T(x,t)-T_s}{T_i-T_s} = \text{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{at}}\right)$

$\dfrac{0-(-10)}{10-(-10)} = \text{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{at}}\right) \rightarrow 0.5 = \text{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{at}}\right)$. A partir du tableau de la fonction d'erreur (annexe : tableau 3.2) : erf (u) = 0.5 → u = 0.48. On peut également utiliser l'approximation :

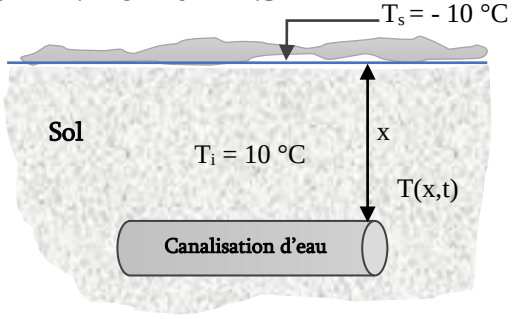
$$u = \sqrt{\frac{\pi}{-4}\ln\left[1-\left(\text{erf}\,(u)\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{\pi}{-4}\ln\left[1-(0.5)^2\right]} \approx 0.48$$

Il vient donc : $u = 0.48 = \dfrac{x}{2\sqrt{at}} \rightarrow x = 0.48\times2\sqrt{3.097\times10^{-7}\times7.776\times10^6} \approx 1.5$ m

A x = 0.5 m : $x/2\sqrt{at} = 0.5/2\sqrt{3.097\times10^{-7}\times7.776\times10^6} = 0.16$

$$\frac{T(0.5,t)-(-10)}{10-(-10)} = \text{erf}\,(0.16) = 0.15 \rightarrow T(0.5,t) = -7\,°C$$

A x = 1 m : $x/2\sqrt{at} = 1/2\sqrt{3.097\times10^{-7}\times7.776\times10^6} = 0.32$



$$\frac{T(0.5,t)-(-10)}{10-(-10)}=\text{erf}\left(0.32\right)=0.3\rightarrow T(0.5,t)=-4\,°C$$

L'énergie totale transmise par unité de surface est donc :

$$Q=2\lambda S\left(T_s-T_i\right)\sqrt{\frac{t}{\pi a}}=2\times0.657\left(-10-10\right)\sqrt{\frac{7.776\times10^{6}}{3.14\times3.097\times10^{-7}}}=-74.31\times10^{6}\ J$$

Énergie négative implique que la chaleur est perdue par le sol

Exercice 06 : Une plaque d'aluminium (0.5 x 30 cm), à une température de 500 °C, doit être refroidie à 90 °C dans un bain d'eau. Les coefficients de transfert de chaleur sont :

T = 500 - 260 °C h = 510 W/m^2.°C

T = 260 - 90 °C h = 2550 W/m^2.°C

Les propriétés de l'Aluminium : ρ = 2700 kg/m^3 ; C_p = 900 J/kg.K ; λ = 230 W/m.K;

- Calculer le taux de refroidissement au moment où la température est de 315 °C.
- Calculer le taux de refroidissement au moment où la température est de 150 °C.
- Calculer le temps nécessaire à un refroidissement jusqu'à 120°C.

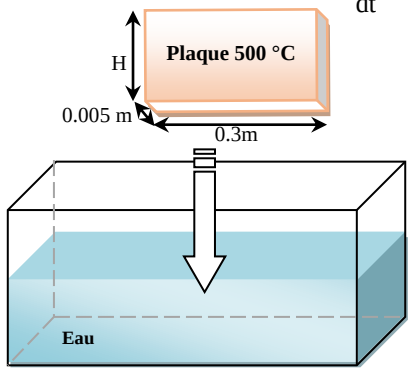
Solution : On calcul en tout premier le nombre de Biot :

$$Bi=\frac{hL}{\lambda}=\frac{510\times0.0025}{237}=0.0054\leq0.1\rightarrow$$ ***système thermique mince***

$S=2\times0.3\times H$; $V=0.005\times0.3\times H$; (on néglige les 4 bord : 4(0.005×H)) :

$$L=\frac{V}{S}=\frac{0.005\times0.3\times H}{2\times0.3\times H}=\frac{0.005}{2}=\frac{e}{2}=0.0025\ \text{(demi épaisseur).}$$

Comme on a montré précédemment, le bilan thermique pendant un intervalle de temps dt se traduit par : $\rho VC_p\frac{dT}{dt}=-hS\left(T-T_\infty\right)$, le taux de refroidissement se présente par le terme $\frac{dT}{dt}$, d'où : $\frac{dT}{dt}=-\frac{hS}{\rho VC_p}\left(T-T_\infty\right)$



- ✓ $\left.\frac{dT}{dt}\right|_{315}=-\frac{510\times2}{0.005\times2700\times900}(315-90)=-18.8\ °C/s$
- ✓ $\left.\frac{dT}{dt}\right|_{150}=-\frac{2550\times2}{0.005\times2700\times900}(150-90)=-25.1\ °C/s$
- ✓ $\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\exp\left(-\frac{hSt}{\rho C_pV}\right)\Rightarrow t=\frac{e\rho C_p}{2h}\ln\left(\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)$

$$\begin{cases}1^{\text{ére}}\text{ étape}: t_1=\frac{0.005\times2700\times900}{2\times510}\ln\left(\frac{260-90}{500-90}\right)=10.48s\\ 2^{\text{éme}}\text{ étape}: t_2=\frac{0.005\times2700\times900}{2\times2550}\ln\left(\frac{120-90}{260-90}\right)=4.13s\end{cases}$$; le temps total sera donc $t_{tot}=t_1+t_2=14.61s$

Exercice 07 : Considérons la conduction thermique unidimensionnelle instationnaire dans un mur passif de diffusivité thermique a = 1.67×10^{-6} m^2/s. Le profil de température T(x,t) dans le mur vérifie le modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases}\frac{\partial^2T}{\partial x^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}\\ T(L,t)=100\,°C\\ T(x,0)=100\,°C\\ T\left(0,t\right)=200\,°C\end{cases}$$ conditions aux limites ; condition initiale

Utiliser la méthode explicite pour trouver la distribution de température dans le mur pour 6 intervalles de temps, Δt = 120 s. Le maillage se compose des nœuds 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 avec un espacement uniforme Δx = 2 cm.

Solution : $F_0 = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1.67\times10^{-6}\times120}{0.02^2} = \frac{1}{2}$, l'équation (3.44) devient donc : $T_i^{n+1} = \frac{\left(T_{i-1}^n + T_{i+1}^n\right)}{2}$

C'est-à-dire, la température cherchée à l'instant (n+1) pour chaque nœud est la moyenne des deux températures adjacentes à l'instant (n). Prenons par exemple le nœud 2 à l'instant 2, la température est de (150 + 100) /2 = 125. Pareillement, les résultats du calcul sont récapitulés dans le tableau suivant :

Nœuds / Temps	**Nœud 1**	**Nœud 2**	**Nœud 3**	**Nœud 4**	**Nœud 5**	**Nœud 6**	**Nœud 7**	**Nœud 8**
0	**200**	100	100	100	100	100	100	**100**
1	**200**	150	100	100	100	100	100	**100**
2	**200**	**150**	125	100	100	100	100	**100**
3	**200**	162.5	125	112.5	100	100	100	**100**
4	**200**	162.5	137.5	112.5	106.25	100	100	**100**
5	**200**	168.75	137.5	121.875	106.25	103.175	100	**100**
6	**200**	168.75	145.3125	121.875	112.525	103.175	101.5875	**100**

Exercice 08 : Dans cet exercice, on garde les données de l'exercice précédent et on considère une génération interne de chaleur égale à 1.25×10^6 W/m^3 au sein du mur. Sachant que, la conductivité thermique du mur est égale à 50 W/m.K. Déterminer les températures nodales.

Solution : $F_0 = \frac{1}{2}$ l'équation (3.45), se réduit à : $T_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(T_{i-1}^n + T_{i+1}^n + \frac{P\Delta x^2}{\lambda}\right)$

Avec : $\frac{P\Delta x^2}{\lambda} = \frac{1.25\times10^6\times0.02^2}{50} = 10$ on obtient : $T_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(T_{i-1}^n + T_{i+1}^n + 10\right)$

Par exemple, le nœud 3 et à l'instant t = 360 s : $T_{3.3} = \frac{135+110+10}{2} = 127.5$ °C.

Les résultats du calcul sont récapitulés dans le tableau suivant :

Nœuds / Temps	**Nœud 1**	**Nœud 2**	**Nœud 3**	**Nœud 4**	**Nœud 5**	**Nœud 6**	**Nœud 7**	**Nœud 8**
0	**200**	100	100	100	100	100	100	**100**
1	**200**	155	105	105	105	105	105	**100**
2	**200**	157.5	135	110	110	110	107.5	**100**
3	**200**	172.5	138.75	**127.5**	115	113.75	110	**100**
4	**200**	174.375	155	131.875	125.625	117.5	111.875	**100**
5	**200**	182.5	158.125	145.3125	129.6875	123.75	113.75	**100**
6	**200**	1840.624	168.90625	148.90625	139.53125	126.71875	116.875	**100**

4.1. Introduction

Jusqu'à maintenant nous avons considéré les échanges convectifs seulement comme une condition aux limites pour traiter les problèmes de conduction de la chaleur étudiés dans les chapitres précédents. Le terme « convection » est utilisé pour décrire le transfert de chaleur entre une surface solide et un fluide en mouvement par rapport à cette surface dont le flux échangé est donné par la loi de Newton $\Phi = hS(T_p - T_\infty)$, avec « h » est le coefficient d'échange convectif.

. On distingue principalement deux types de convection :

- **La convection naturelle :** Le mouvement du fluide est causé par un champ de forces intérieur (gravité, gradient de densité, gradient de température).
- **La convection forcée :** Le fluide est mis en mouvement par l'action d'un champ de forces externes (pompe, ventilateur, etc.).

D'une façon simplifiée, l'objectif principal de l'étude du phénomène de la convection consiste essentiellement à développer des méthodes permettant l'évaluation du coefficient d'échange par convection « h ».

4.2. Equation de conservation

4.2.1. Equation de conservation de la masse ou équation de continuité

Cette équation exprime la conservation de la masse du fluide au cours de l'écoulement, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{V}) = 0 \tag{4.1}$$

Pour un écoulement permanent et incompressible l'équation de conservation de la masse se réduit à : $\mathrm{div}\vec{V} = 0$, expression que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{4.2}$$

4.2.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement

Pour un fluide incompressible et Newtonien en écoulement, l'équation de quantité de mouvement (Navier-Stokes) s'écrit sous la forme :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \vec{F} + \mu \nabla^2 \vec{V} \tag{4.3}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \rho \dfrac{Du}{Dt} = F_x - \dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \dfrac{Dv}{Dt} = F_y - \dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \dfrac{Dw}{Dt} = F_z - \dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases} \tag{4.4}$$

Avec : $\dfrac{D}{Dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + w\dfrac{\partial}{\partial z}$ est la dérivée particulaire.

ρ : Masse volumique.

P : Pression.
μ : Viscosité dynamique.
u,v,w : Composant du vecteur vitesse.

4.2.3. Equation de conservation de l'énergie

Pour un fluide incompressible et Newtonien, l'équation d'énergie est donnée par :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\lambda}{\rho.Cp}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{4.5}$$

4.3. Ecoulement laminaire et écoulement turbulent

Le coefficient d'échange convectif « h » dépend fortement de la nature d'écoulement du fluide. A effet il est très important de déterminer le régime d'écoulement : est-il laminaire ou turbulent. La transition entre les régimes d'écoulement : laminaire et turbulent a été démontrée par Osborne Reynolds dans ses expériences approfondies réalisées en 1883 lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré avec l'ancre jouant le rôle de traceur (voir figure 4.1). En utilisant des fluides divers (viscosité différente), en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds s'était rendu compte que la zone de transition entre le régime laminaire et le régime turbulent se produit toujours autour d'un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds donné par :

$$Re = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} \quad \text{ou} \quad Re = \frac{u_\infty L}{\nu} \tag{4.6}$$

Avec, ρ : masse volumique du fluide, u_∞ : vitesse du fluide, L : Dimension caractéristique (écoulement à l'intérieur d'une conduite cylindrique L égale au diamètre interne D), μ : viscosité dynamique du fluide, ν = viscosité cinématique du fluide.

Pour un écoulement dans un tube cylindrique : Re < 2000 le régime est laminaire, Re > 3000 le régime est turbulent, entre les deux valeurs critiques on a le régime de transition.
Pour un écoulement le long d'une plaque plane la valeur critique de Re varie entre 10^5 et 3×10^6, néanmoins la valeur de 5×10^5 est utilisée.

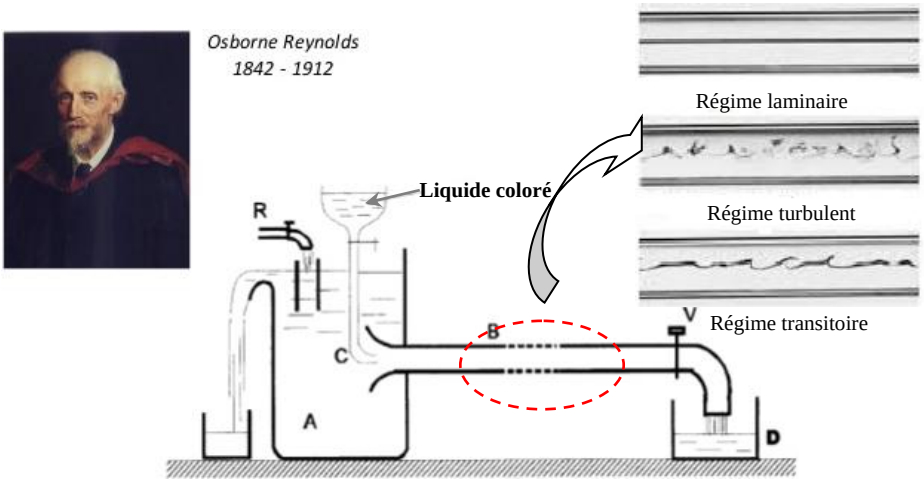


Figure 4.1 : Expérience de Reynolds

4.4. Concept de la couche limite

Considérons une plaque plane sur laquelle se développe un écoulement dont la vitesse du fluide est parallèle à la plaque (voir figure 4.2). Les particules fluides en contact avec la surface ont une vitesse nulle en raison des forces visqueuses. Ces particules freinent les particules voisines dans les couches supérieures et cela sur une certaine distance « y », jusqu'à ce que cet effet de freinage devienne négligeable. Ce retard est accompagné de contraintes de cisaillement « τ » intervenant dans les plans parallèles à la vitesse du fluide. En augmentant la distance à la surface, la vitesse « u » du fluide tend vers la vitesse « u_∞ ». La valeur de y où la vitesse ($u=0.99u_\infty$) est appelée épaisseur de couche limite hydrodynamique notée « δ ». Le profil de vitesse dans la couche limite représente la variation de vitesse en fonction de y, à travers la couche limite. La couche limite sépare donc deux domaines distincts, dans le premier, les gradients de vitesses et les contraintes de cisaillement sont importants alors qu'ils sont négligeables dans le second. La couche limite hydrodynamique se développe quel que soit l'écoulement et a une importance fondamentale pour le transfert par convection. Elle est directement liée aux contraintes de cisaillement à la surface « τ » et donc aux effets de frottement. L'épaisseur de la couche limite augmente avec la distance « x ». Pour un écoulement externe, elle fournit une base à l'évaluation du coefficient de frottement local :

$$C_f = \frac{2\tau}{\rho u_\infty^{\,2}} \tag{4.7}$$

Ce paramètre clé permet de déterminer la force de traînée. Pour un fluide Newtonien (visqueux), le cisaillement à la surface peut être évalué à partir du gradient de vitesse à cette même surface :

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \tag{4.8}$$

Lorsqu'on injecte du colorant à l'aide d'un capillaire placé prés au bord d'attaque de la plaque, on observe que le filet coloré conserve une forme régulière jusqu'à une abscisse « x_c » puis éclate d'une façon désordonnée. La position moyenne de « x_c » est dite abscisse de transition : $x < x_C$ la couche limite est laminaire et $x > x_C$ la couche limite est turbulente.

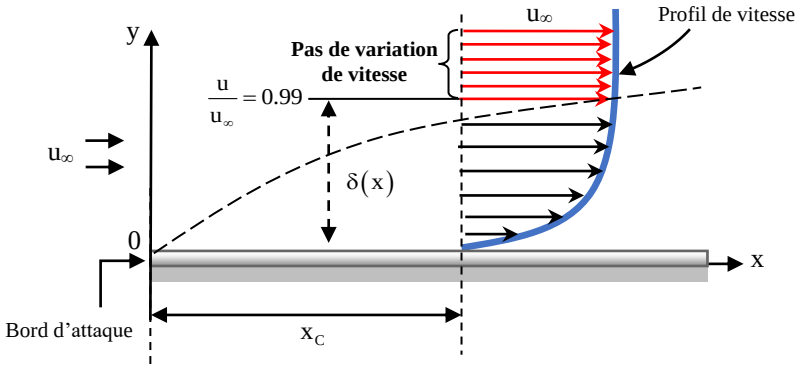


Figure 4.2 : Couche limite hydrodynamique sur une surface plane

Comme nous l'avons expliqué précédemment, la couche limite hydrodynamique se développe pour tout écoulement. Cependant, la couche limite thermique ne se développera que si la température du fluide et celle de la surface sont différentes. Considérons l'écoulement représenté sur la figure 4.3 dont le fluide arrive à une température « T_∞ » sur une plaque horizontale.

Les particules fluides en contact avec la surface de la plaque sont à la température de cette surface. Ces particules échangent de l'énergie avec les particules voisines, ce qui donne naissance à des gradients de température dans le fluide. Le domaine où ces gradients se développe est appelé la couche limite thermique et son épaisseur « δ_t » est définie comme la distance pour laquelle le rapport $(T_p-T)/(T_p-T_\infty)$ = 0.99. Comme pour la couche limite hydrodynamique, l'épaisseur de la couche limite thermique augmente avec la distance « x ». Le flux peut maintenant être considéré comme étant constitué de deux régions.

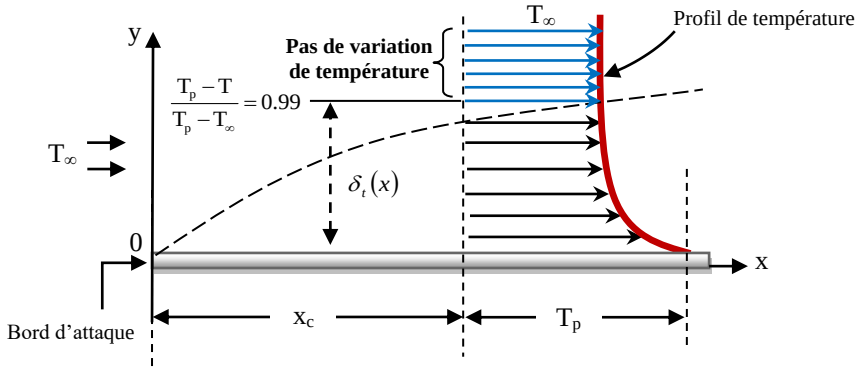


Figure 4.3 : Couche limite thermique sur une surface plane

La densité de flux dans le fluide à la surface (y = 0) s'exprime à partir de la loi de Fourier

$$\varphi = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{4.9}$$

Cette chaleur est ensuite transportée par convection dans le fluide et la densité de flux s'exprime donc aussi selon la loi générale de Newton :

$$\varphi = h\left(T_p - T_\infty\right) \tag{4.10}$$

Ceci permet de mettre en évidence la relation entre le coefficient d'échange thermique par convection « h » et le gradient de température dans le fluide à la paroi :

$$h = \frac{-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}}{\left(T_p - T_\infty\right)} \tag{4.11}$$

- **Signification des couches limites**
  - La couche limite hydrodynamique est caractérisée par la présence de gradients de vitesses et de contraintes de cisaillement.
  - La couche limite thermique est caractérisée par la présence de gradients de température.
  - Le paramètre clé pour la couche hydrodynamique est le coefficient de frottement.
  - Le paramètre clé pour la couche limite thermique est le coefficient d'échange thermique par convection.

4.5. Méthode d'évaluation du coefficient d'échange par convection

Les principales techniques employées en convection pour déterminer le coefficient d'échange convectif « h » sont :

- L'analyse dimensionnelle combinée à l'expérimentation.
- La solution analytique ou numérique des équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie.

- L'analogie entre quantité de chaleur et quantité de mouvement.
- Détermination expérimentale.
  On se limitera dans le cadre de ce cours à la première technique.

4.5.1. Théorème de Vaschy–Buckingam ou théorème Pi

Quand le système étudié est trop complexe, pour permettre une résolution complète des équations fondamentales, l'analyse dimensionnelle (théorème de Vaschy–Buckingam ou théorème de π) est différente des autres méthodes par le fait qu'elle donne accès de façon simple à des relations entre les différentes grandeurs caractérisant ce système sans introduction d'équations mathématiques à résoudre. Elle permet la combinaison d'un certain nombre de variable (ou groupements adimensionnels) qui débouchera sur des relations empiriques décrivant des résultats expérimentaux d'une manière acceptable et largement utilisable.

Enoncé : Etant donné un phénomène physique ou intervient « p » grandeurs physique notés E_1, E_2,…, E_p et « q » nombre d'unité fondamentale intervenant dans la mesure de « p » grandeurs.

La forme la plus générale de n'importe quelle équation physique complète est :

$f(E_1, E_2, ..., E_P) = 0$ qui peut se mettre sous la forme : $F(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{p-q}) = 0$.

Les $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{P-q}$ désignent des produits sans dimension indépendants qui pouvant être constitués par les p grandeurs physique considéré. La fonction « f » doit être homogène par rapport aux dimensions fondamentales : La masse [M], la longueur [L], le temps [T] et la température [θ].

Exemple 4.1 : Dans cet exemple, on s'intéresse à appliquer cette analyse au cas de transfert convectif entre un cylindre et un écoulement transversal forcée (voir figure 4.4).

D'après la loi de Newton, le flux de chaleur est proportionnel à l'écart de température de la paroi et celle du fluide. Le coefficient d'échange par convection « h » dépend alors :

- Diamètre du cylindre D.
- Vitesse d'écoulement u_∞.
- Les caractéristiques thermophysiques du fluide (λ, ρ, μ, C_p).

On dispose donc de sept paramètres mesurés à l'aide des quatre unités fondamentales (L, M, T et θ). Le tableau suivant récapitule toutes les grandeurs agissantes sur l'échange et leurs dimensions :

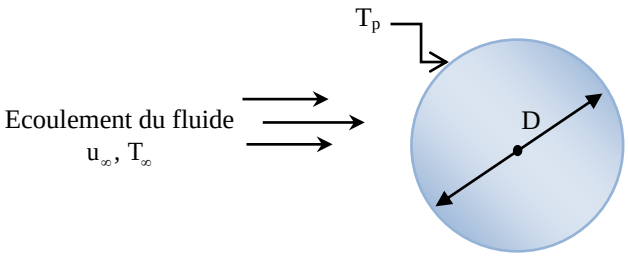


Figure 4.4 : Analyse dimensionnelle

Grandeurs	Symboles	Unités [SI]	Dimensions
Coefficient d'échange par convection	h	$W/m^2.k$	$[MT^{-3}\theta^{-1}]$
Ecart de température	T_p-T_∞	K	$[\theta]$
Diamètre du cylindre	D	m	[L]
Vitesse du fluide	u_∞	m/s	$[LT^{-1}]$
Masse volumique du fluide	ρ	kg/m^3	$[ML^{-3}]$
Viscosité dynamique	μ	kg/m.s	$[ML^{-1}T^{-1}]$
Conductivité thermique	λ	W/m.k	$[MLT^{-3}\theta^{-1}]$
Chaleur spécifique	C_p	J/kg.k	$[L^2T^{-2}\theta^{-1}]$

Il est alors possible d'exprimer le coefficient d'échange convectif « h » par :

$$h = a \times \mu^b \times D^c \times u_\infty^d \times C_p^{\ e} \times \rho^f \times \lambda^g \tag{4.12}$$

Bien entendu, chaque grandeur possède une dimension particulière, l'équation en termes de dimensions s'écrit :

$$\left[MT^{-3}\theta^{-1}\right] = \left[ML^{-1}T^{-1}\right]^b \left[L\right]^c \left[LT^{-1}\right]^d \left[L^2T^{-2}\theta^{-1}\right]^e \left[ML^{-3}\right]^f \left[MLT^{-3}\theta^{-1}\right]^g \tag{4.13}$$

Masse : 1=b+f+g **Longueur :** 0=-b+c+d+2e-3f+g

Temps : -3=-b-d-2e-3g **Température :** -1=-e-g

Il s'agit donc d'un système sous déterminé, exprimant les constantes c, d, e et g en fonction de deux d'entre elle uniquement. Si l'on choisit de conserver les exposants b et f, on obtient : f =1- b - f ; e = b + f ; d = f ; c = f - 1. L'équation de départ 4.12 devient alors :

$$h = a \times \mu^b \times D^{(f-1)} \times u_\infty^f \times C_p^{\ (b+f)} \times \rho^f \times \lambda^{(1-b-f)} \tag{4.14}$$

Multipliant l'équation 4.14 par D et divisant par λ, on obtient : $\frac{hD}{\lambda} = a\left(\frac{\rho u_\infty D C_P}{\lambda}\right)^f \left(\frac{\mu C_P}{\lambda}\right)^b$

La dimension du terme $\frac{C_p}{\lambda}$ est relatif a $\frac{1}{\mu}$, on aura en définitif :

$$\frac{hD}{\lambda} = a\left(\frac{\rho u_\infty D}{\mu}\right)^f \left(\frac{\mu C_P}{\lambda}\right)^b \tag{4.15}$$

Les groupements adimensionnels π_1, π_2 et π_3 obtenus sont respectivement :

$\pi_1 = \frac{hD}{\lambda}$: Nombre de Nusselt ; $\pi_2 = \frac{\mu C_P}{\lambda}$: Nombre de Prandtl ; $\pi_3 = \frac{\rho u_\infty D}{\mu}$: Nombre de Reynolds.

Soit finalement : $$Nu = a \times Re^f \ Pr^b \tag{4.16}$$

Les constantes a, b et f sont déterminées grâce au concours de l'expérimentation.

La relation (4.16) permet alors de calculer le coefficient d'échange par convection « h » à partir de sa définition via le nombre de Nusselt, et d'en déduire le flux de chaleur échangé.

4.6. Formules empiriques usuelles

De très nombreuse relations empiriques sont disponible dans la littérature pour évaluer le coefficient d'échange convectif « h » à travers l'expression du nombre de Nusselt. Ces relations dépendent notamment du type de convection forcée ou naturelle, de la nature du régime d'écoulement du fluide laminaire ou turbulent et de la configuration géométrique (plaque plane, tube cylindrique, rangé de tubes, espace confiné, etc). Très souvent, elles conservent l'allure générale de l'équation 4.16. L'objectif du présent paragraphe est de collecter ces relations les configurations les répondues dans les systèmes énergétiques.

N.B : On peut trouver dans certains ouvrages anciens des formules empiriques basés sur le nombre de Margoulis (ou Stanton) donné par la relation : $M = St = \frac{Nu}{Re\,Pr} = \frac{h}{\rho u_\infty C_p}$

Avec : le produit Re×Pr est appelé nombre de Peclet $Pe = Re\,Pr$

4.6.1. Convection forcée

4.6.1.1. Ecoulement externe

a. Ecoulement sur une plaque plane : considérons un fluide s'écoulant dans le sens longitudinal d'une plaque plane horizontale de longueur « L ». La température et la vitesse du fluide loin de la paroi sont respectivement « u_∞ » et « T_∞ » (voir figure 4.5).

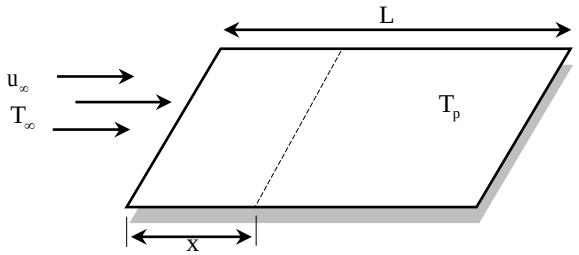


Figure 4.5 : Ecoulement longitudinal sur une plaque plane

- **Ecoulement laminaire :** $Re < 3\times10^5$

$$\begin{aligned} Nu_x &= 0.332\,Re_x^{0.5}\,Pr^{0.33} \qquad 0.5 \le Pr \le 10 \\ Nu_L &= 0.664\,Re_L^{0.5}\,Pr^{0.33} \qquad 0.5 \le Pr \le 10 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Si le nombre de Prandtl Pr > 10 :

$$Nu_x = 0.339\,Re_x^{0.5}\,Pr^{0.33} \tag{4.18}$$

Avec : Re_x : Nombre de Reynolds calculé à l'abscisse *x*, soit :

$$Re = \frac{\rho u_\infty x}{\mu} \tag{4.19}$$

Nu_x : Nombre de Nusselt local calculé à une abscisse x.
Nu_L : Nombre de Nusselt moyen calculé sur toute la longueur de la plaque.

Le coefficient d'échange de chaleur par convection (local) : $h_x = \frac{Nu_x \lambda}{x}$

Le coefficient d'échange de chaleur par convection (moyen) : $h_L = \frac{Nu_L \lambda}{L}$

Il s'ensuit également que pour $Pr \ge 0.6$, l'épaisseur de la couche limite thermique est : $\delta_t = \frac{\delta}{Pr^{\frac{1}{3}}}$ avec $\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$ représente la couche limite hydrodynamique.

- **Ecoulement turbulent :** $Re > 5\times10^5$

$$\begin{aligned} Nu_x &= 0.0296\,Re_x^{0.8}\,Pr^{0.33} \qquad 0.6 \le Pr \le 60 \\ Nu_L &= 0.035\,Re_L^{0.8}\,Pr^{0.33} \qquad 0.6 \le Pr \le 60 \end{aligned} \tag{4.20}$$

L'épaisseur de la couche limite thermique est calculer par :

$$\delta_t = \delta = \frac{0.37x}{\sqrt{Re_x}} \tag{4.21}$$

Remarque : Les propriétés thermophysiques du fluide sont calculées à la température moyenne T_m donnée par : $T_m = \frac{T_\infty + T_p}{2}$

Les propriétés thermophysiques des différents fluides sont soit données directement dans les exercices, soit interpolées à partir des tables trouvées dans la littérature. On donne dans le tableau 4.1 (voir annexe) les caractéristiques de l'air et de l'eau.

b. Ecoulement perpendiculaire à l'axe d'un cylindre : Le fluide est en écoulement perpendiculaire par rapport à l'axe du cylindre. Sa vitesse en amont est « u_∞ » et sa température « T_∞ » (voir figure 5.6). Un sillage se forme en aval de l'écoulement qui conduit à une répartition non homogène du coefficient d'échange sur la périphérie du cylindre. Le coefficient d'échange par convection a pour expression :

$$Nu = C\,Re^n \tag{4.22}$$

Les constantes C et n dépendent du nombre de Reynolds et de la nature du fluide, leurs valeurs sont données dans le tableau suivant :

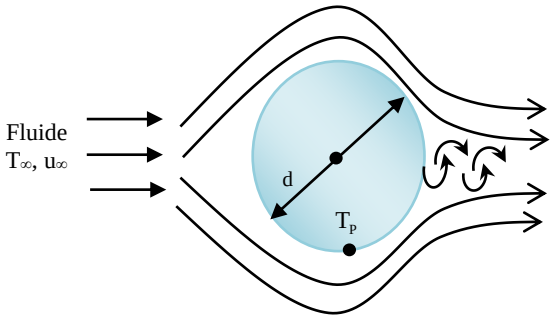


Figure 4.4 : Ecoulement perpendiculaire à l'axe d'un cylindre

Re	n	C	
		Gaz	Liquide
1 – 4	0.330	0.891	$0.989\,Pr^{\frac{1}{3}}$
4 – 40	0.385	0.821	$0.911\,Pr^{\frac{1}{3}}$
40 – 4000	0.466	0.615	$0.683\,Pr^{\frac{1}{3}}$
4000 – 40000	0.618	0.174	$0.193\,Pr^{\frac{1}{3}}$
40000 - 250000	0.805	0.0239	$0.0266\,Pr^{\frac{1}{3}}$

Tableau 4.2 : Valeur de C et n pour le nombre de Nusselt - écoulement perpendiculaire à un cylindre

c. Ecoulement perpendiculaire à un faisceau de tubes : Beaucoup d'installations industrielles sont constituées de rangées de tubes parallèles immergées dans un écoulement perpendiculaire ou incliné à leurs axes. Comme le montre la figure 4.7, les tubes peuvent être disposés en ligne ou en quinconce. La disposition en quinconce conduit à de plus fortes turbulences et donc un coefficient d'échange plus important que pour un faisceau aligné. Le nombre de Nusselt pour une rangée « i » est calculé par l'expression suivante :

$$Nu_i = C\,Re^n\,Pr_f^{0.33}\left(\frac{Pr_f}{Pr_p}\right)^{0.25}\varepsilon_\delta\varepsilon_\alpha\varepsilon_i \tag{4.23}$$

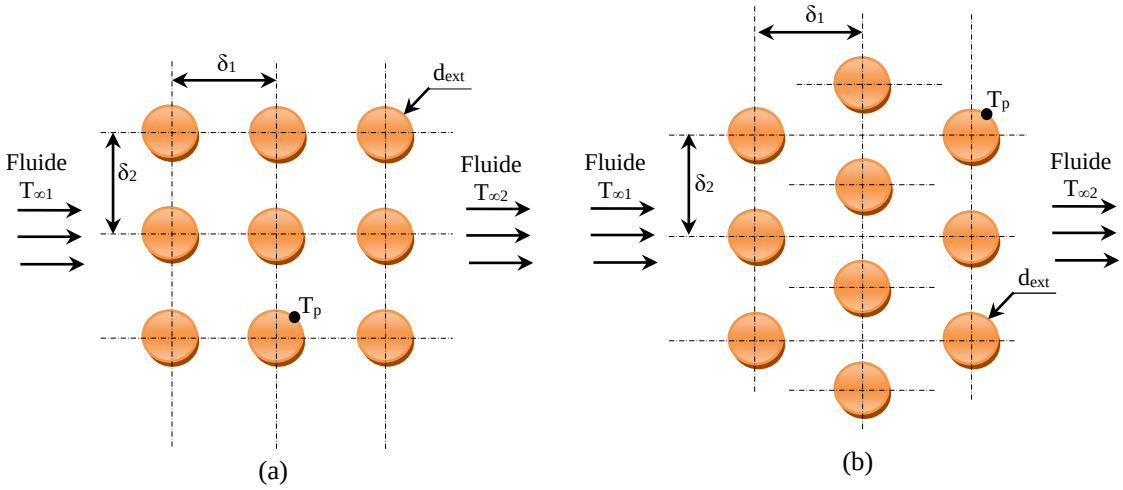


Figure 4.7 : Écoulement autour d'un faisceau de tubes :
(a) disposition en ligne ; (b) disposition en quinconce

Les constantes $C, n, \varepsilon_\delta, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_i$ sont reportées dans le tableau suivant :

Arrangements	C	n	ε_i	ε_δ	ε_α
En ligne	0.26	0.65	0.6 pour la rangée 1 0.9 pour la rangée 2 1 pour la rangée 3 et plus	$\left(\frac{\delta_2}{d_{ext}}\right)^{-0.15}$	$10° \rightarrow 0,42$ $20° \rightarrow 0,52$ $30° \rightarrow 0,67$ $40° \rightarrow 0,78$
En quinconce	0.41	0.6	0.6 pour la rangée 1 0.7 pour la rangée 2 1 pour la rangée 3 et plus	$\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{6}}$ pour $\frac{\delta_1}{\delta_2} < 2$ 1.12 pour $\frac{\delta_1}{\delta_2} \geq 2$	$50° \rightarrow 0,88$ $60° \rightarrow 0,94$ $70° \rightarrow 0,98$ $80° \rightarrow 1$ $90° \rightarrow 1$

Tableau 4.3 : Constantes pour le nombre de Nusselt - écoulement perpendiculaire à un faisceau de tubes

Le coefficient d'échange convectif moyen du faisceau est donc :

$$h = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_{i.} S_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i} \qquad (4.24)$$

Remarque : Les caractéristiques du fluide sont déterminées à la température moyenne donnée par : $T_m = \frac{T_{\infty 1} + T_{\infty 2}}{2}$

d. Écoulement autour d'une sphère : Pour une sphère, les effets de sillage sont similaires à ceux rencontrés dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre, néanmoins la littérature recommande la corrélation donnée par Whitakar :

$$Nu = 2 + \left(0.4\,Re^{0.5} + 0.06\,Re^{0.66}\right) Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_f}{\mu_p}\right)^{0.25} \quad \text{valable pour :} \quad \begin{bmatrix} 0.71 < Pr < 380 \\ 3.5 < Re < 7.6\ 10^4 \\ 1 < \left(\frac{\mu_f}{\mu_p}\right) < 3.2 \end{bmatrix} \qquad (4.25)$$

- Corrélation de Kreith :

$$Nu = 2.2\,Pr + 0.48\,Re^{0.5} \quad \text{valable pour : } 1 < Re < 25 \tag{4.26}$$

- Corrélation de Katsnel'son et Timofeyeva : quelle que soit la valeur de Re

$$Nu = 2 + 0.03\,Pr^{0.33}\,Re^{0.54} + 0.35\,Pr^{0.36}\,Re^{0.58} \tag{4.27}$$

- Corrélation de Froessling :

$$Nu = 2 + 0.60\,Pr^{0.33}\,Re^{0.5} \text{ valable pour : } \begin{bmatrix} 0.6 \le Pr \le 400 \\ 3.5 \le Re \le 7\ 10^4 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

- Corrélation de Kramers :

$$Nu = 2 + 1.3\,Pr^{0.15} + 0.66\,Pr^{0.31}\,Re^{0.5} \text{ valable pour : } \begin{bmatrix} 0.6 \le Pr \le 380 \\ 10 \le Re \le 10^5 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Remarque : Les caractéristiques thermophysiques du fluide sont évaluées à T_m. Les viscosités dynamiques du fluide μ_f et μ_p sont déterminées respectivement à T_∞ et T_p.

4.6.1.2. Ecoulement interne

a. Ecoulement à l'intérieur des tubes cylindriques : considérons un fluide s'écoulant à l'intérieur d'un tube de forme cylindrique de longueur « L » et de diamètre intérieur « d_{int} » (voir figure 4.8).

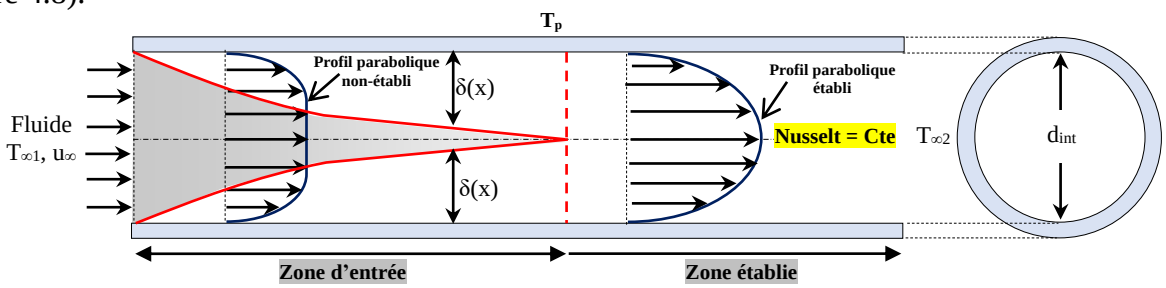


Figure 4.8 : Ecoulement à l'intérieur des tubes cylindriques

- **Régime laminaire :** $(Re \le 2100)$ **:** on distingue deux zones : la zone d'entrée et la zone établie.

✓ **Zone établie :** Dans cette zone, les études théoriques montrent que le nombre de Nusselt tend vers une valeur limite (Nu = Cte). Il ne dépend que des conditions aux limites thermiques imposées sur la surface externe de la conduite, soit :

- Température imposée (T_p constante) : **Nu = 3.66**.
- Flux imposé (Φ constant) : **Nu = 4.36**.

Pareillement au cas des conduites circulaires, les écoulements laminaires à régimes dynamique et thermique établis dans les conduites non-circulaires sont à Nu constant. Dans le tableau ci-dessous, on trouve les valeurs de Nu pour quelques formes géométriques

Example : Conduite rectangulaire (a×b) avec b/a = 2, on a :

- Température imposée (T_p constante) : **Nu = 3.39**.
- Flux imposé (Φ constant) : **Nu = 4.12**.

✓ **Zone d'entrée :** Pour la zone d'entrée la littérature recommande les deux corrélations suivantes :

- Corrélation de Haussen :

$$Nu = 3.66 + \frac{0.0668\,Re\,Pr\,(D/L)}{1 + 0.04\left[Re\,Pr\,(D/L)\right]^{2/3}} \tag{4.30}$$

- Corrélation de Sieder et Tate :

$$Nu = 1.86\left(Re\,Pr\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{D}{L}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0.14} \quad \text{valable pour :} \quad \begin{bmatrix} 0.48 \le Pr \le 16\,700 \\ 0.0044 < \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right) < 9.75 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Avec : le terme : $Re\,Pr\left(D/L\right)$ est appelé le nombre de Graetz

- **Régime turbulent :** $\left(Re \ge 2500\right)$

- Corrélation de Colburn : utilisée pour des différences de températures (T_p–T_m) faible ou modérées :

$$Nu = 0.023\,Re^{0.8}\,Pr^{0.33} \text{ valable pour : } \begin{bmatrix} 0.7 \le Pr \le 160,\ Re \ge 10^4 \\ L/D \ge 10 \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

- Corrélation de Dittus-Boelter : La précision de la relation de Colburn peut être améliorée en la modifiant comme :

$$Nu = 0.023\,Re^{0.8}\,Pr^{n} \text{ valable pour : } \begin{bmatrix} 0.7 \le Pr \le 160,\ Re \ge 10^4 \\ L/D \ge 10 \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

Avec : n = 0.4 pour le chauffage ($T_p > T_\infty$), n = 0.3 pour le refroidissement ($T_p < T_\infty$)

- Corrélation de Sieder et Tate : Pour les écoulements caractérisés par de grandes variations de propriétés thermophysiques, l'équation de Sieder et Tate, est recommandée :

$$Nu = 0.027\,Re^{0.8}\,Pr^{0.33}\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0.14} \text{ valable pour : } \begin{bmatrix} 0.7 \le Pr \le 16\,700,\ Re \ge 10^4 \\ L/D \ge 10 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

Remarques :

- Les caractéristiques thermophysiques du fluide sont évaluées à la température moyenne entre l'entrée et la sortie du tube mis à part la viscosité dynamiques μ_p est déterminée à T_p.

- Pour des tubes à section transversale non circulaire, carrée, rectangle, triangle, losange, etc, les nombres adimensionnels sont calculés en remplaçant le diamètre interne par le diamètre hydraulique d_h donnée par :

$$d_h = \frac{4 \times \text{surface de la section transversale de la conduite}}{\text{périmètre de la section}} = \frac{4 \times S}{P} \tag{4.35}$$

4.6.2. Convection naturelle ou libre

Dans le cas de la convection libre, il peut être démontré qu'une corrélation entre nombres adimensionnels est aussi indispensable. Dans ce cas les nombres adimensionnels sont :

- Le nombre de Grachoff donné par la relation suivante :

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\upsilon^2} = \frac{\rho^2 g\beta\Delta T L^3}{\mu^2} \tag{4.36}$$

ΔT : Différence de température.

L : Longueur caractéristique (ou dimension caractéristique).

β : Coefficient de dilatation volumique, pour un gaz parfait : $\beta = \frac{1}{T_m}$, la température moyenne T_m est prise en kelvin [k] ; $\beta \approx 0$ pour liquides.

- Le nombre de Rayleigh est donné par :

$$Ra = Gr\,Pr \tag{4.37}$$

4.6.2.1. Convection naturelle externe

Les corrélations empiriques du nombre de Nusselt moyen sont de la forme :

$$Nu = CRa^{n} \qquad (4.38)$$

Parmi les nombreuses corrélations disponibles dans la littérature, nous présentons dans le tableau suivant, les plus connus et largement utilisés.

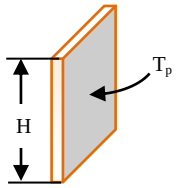
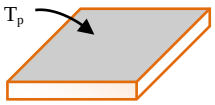
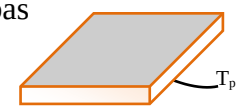
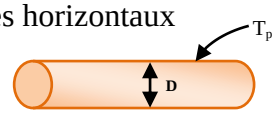
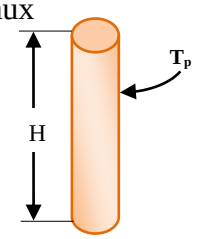
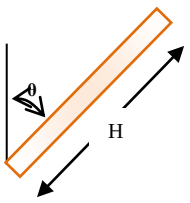
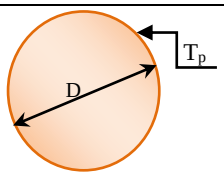
Géométries	Ra	Nu
Plaques planes verticales L=H 	$10^4 - 10^9$ laminaire $10^9 - 10^{13}$ turbulent Formule générale	$Nu = 0.59Ra^{0.25}$ $Nu = 0.13Ra^{0.33}$ $Nu = \left\{0.825 + \frac{0.387Ra^{\frac{1}{6}}}{\left[1+(0.492/Pr)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{8}{27}}}\right\}^2$
Plaques planes horizontales chauffant vers le haut L=S/P 	$10^4 - 10^7$ laminaire $10^7 - 10^{11}$ turbulent	$Nu = 0.54Ra^{0.25}$ $Nu = 0.15Ra^{0.33}$
Plaques planes horizontales chauffant vers le bas L=S/P 	$10^5 - 10^{10}$ laminaire $10^{10} - 10^{13}$ turbulent	$Nu = 0.27Ra^{0.25}$ $Nu = 0.54Ra^{0.33}$
Cylindres horizontaux L=D 	$10^3 - 10^9$ laminaire $10^9 - 10^{13}$ turbulent	$Nu = 0.53Ra^{0.25}$ $Nu = 0.1Ra^{0.33}$
Cylindres verticaux L=H 	-	Si $D \le \frac{35L}{Gr^{0.25}}$, on peut utiliser la corrélation des plaques verticales $Nu = \left\{0.825 + \frac{0.387Ra^{1/6}}{\left[1+(0.492/Pr)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2$
Plaques inclinées L=H 	-	Les corrélations traitant les plaques verticales doivent être modifiées en remplaçant la gravité g dans le nombre de Rayleigh par **gcosθ** (0<θ<60°), où θ est l'angle d'inclinaison mesuré par rapport à la verticale.
Sphères L=0.5πD 	$Ra \le 10^{11}$, $Pr \ge 0.7$	$Nu = 2 + \frac{0.589Ra^{0.25}}{\left[1+(0.469/Pr)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{4}{9}}}$

Tableau 4.4 : Valeur de C et n pour le nombre de Nusselt - convection naturelle

4.6.2.2. Convection naturelle interne

Le transfert de chaleur par convection naturelle dans des espaces fermés a fait l'objet de nombreuses études approfondies tant théoriques qu'expérimentaux. L'intérêt de son étude réside dans son implication dans les différents secteurs. Il existe de nombreuses corrélations pour le nombre de Nusselt. Les corrélations sous la forme loi-puissance : $Nu = CRa^n$, avec « C » et « n » des constantes inférieures à l'unité, sont suffisamment précises, mais elles sont habituellement applicables à une gamme étroite de nombres de Prandtl et de Rayleigh et de rapports d'aspect. Nous présentons dans ce qui suit les corrélations largement utilisées pour divers types d'enceintes : cavités rectangulaires, cylindres et sphères concentriques.

- **Cavités rectangulaires :** La cavité rectangulaire (voir figure 4.9) continue à être la géométrie qui présente le plus d'intérêt. Dans ce type d'enceinte, deux parois opposées sont maintenues à des températures différentes ($T_1 > T_2$), tandis que les autres parois sont isolées de l'environnement. L'angle d'inclinaison α entre les surfaces chauffée et refroidie et le plan horizontal peut varier de 0° (cavité horizontale chauffée par le bas) à 90° (cavité verticale chauffée par les parois latérales) à 180° (cavité horizontale chauffée par le haut).

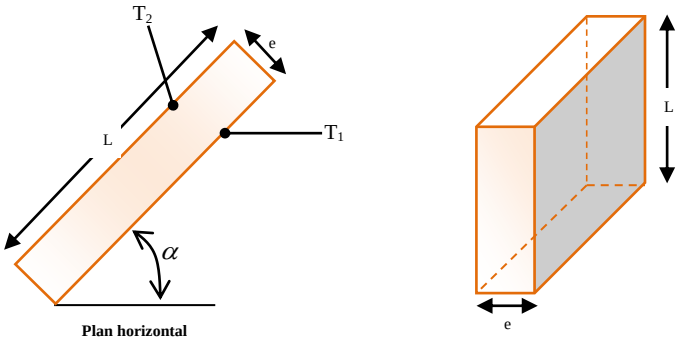


Figure 4.9 : Convection naturelle dans une cavité rectangulaire

- **Cavités rectangulaires horizontales**

Pour les enceintes horizontales (α = 0°) contenant de l'air, Jakob (1949) recommande les corrélations suivantes :

$$\begin{aligned} Nu &= 0.195Ra^{1/4} \qquad 10^4 \le Ra \le 4.10^5 \\ Nu &= 0.068Ra^{1/3} \qquad 4.10^5 \le Ra \le 10^7 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Ces relations simples peuvent également être utilisées pour d'autres gaz avec $0.5 < Pr < 2$. En utilisant l'eau, l'huile de silicone et le mercure dans leurs expériences, Globe et Dropkin (1959) ont obtenu cette corrélation pour les enceintes horizontales chauffées par le bas :

$$Nu = 0.069Ra^{1/3}\,Pr^{0.074} \qquad 3.10^5 \le Ra \le 7.10^9 \tag{4.40}$$

Sur la base des expériences utilisant l'air comme fluide, Hollands et al (1976) recommandent la corrélation suivante :

$$Nu = 1 + 1.44\left[1 - \frac{1708}{Ra}\right]^+ + \left[\left(\frac{Ra}{5830}\right)^{1/3} - 1\right]^+ \qquad Ra < 10^8 \tag{4.41}$$

La notation $[]^+$ indique que si la quantité encadrée de crochets est négative, elle doit être prise égale à zéro. Cette relation est valable aussi pour les liquides avec des nombres de Prandtl modérés ($Pr < 10^5$).

- **Cavités rectangulaires verticales**

Pour les enceintes verticales (α = 90°)

$$\mathrm{Nu} = 0.22\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0.2+\mathrm{Pr}}\mathrm{Ra}\right)^{0.28}\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{e}}\right)^{-\frac{1}{4}} \text{ valable pour : } \begin{bmatrix} 2<\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{e}}<10 \\ \mathrm{Pr}<10^5 \\ \mathrm{Ra}<10^{10} \end{bmatrix} \qquad (4.42)$$

$$\mathrm{Nu} = 0.18\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0.2+\mathrm{Pr}}\mathrm{Ra}\right)^{0.29} \text{ valable pour : } \begin{bmatrix} 1<\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{e}}<2 \\ 10^{-3}<\mathrm{Pr}<10^5 \\ \dfrac{\mathrm{Pr.Ra}}{0.2+\mathrm{Pr}}>10^3 \end{bmatrix} \qquad (4.43)$$

Pour des rapports d'aspect plus grands, les corrélations suivantes ont été proposées :

$$\mathrm{Nu} = 0.42\mathrm{Ra}^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{Pr}^{0.012}\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{e}}\right)^{-0.3} \text{ valable pour : } \left[10<\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{e}}<40,\ 1<\mathrm{Pr}<2.10^4,\ 10^4<\mathrm{Ra}<10^7\right] \qquad (4.44)$$

$$\mathrm{Nu} = 0.046\mathrm{Ra}^{\frac{1}{3}} \text{ valable pour : } \left[1<\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{e}}<40,\ 1<\mathrm{Pr}<20,\ 10^6<\mathrm{Ra}<10^9\right] \qquad (4.45)$$

- **Cavités rectangulaires inclinées**

La convection naturelle dans les espaces confinées inclinées sont couramment rencontrés dans les capteurs solaires plans (entre le vitrage et l'absorbeur), les cheminées solaires, les toits inclinés, etc. Dans ces configurations, le transfert de chaleur dépend du rapport d'aspect « L/e » ainsi que de l'angle d'inclinaison. Pour les grands rapports d'aspect ($\mathrm{L/e} \geq 12$), la corrélation de Hollands (1976) donne de bons résultats et cela pour des angles d'inclinaison allant jusqu'à 70°.

$$\mathrm{Nu} = 1+1.44\left[1-\frac{1708}{\mathrm{Ra}\cos\alpha}\right]^{+}\left(1-\frac{1708\left(\sin 1.8\alpha\right)^{\frac{1}{6}}}{\mathrm{Ra}\cos\alpha}\right)+\left[\left(\frac{\mathrm{Ra}\cos\alpha}{5830}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]^{+} \qquad \mathrm{Ra}<10^5 \qquad (4.46)$$

La quantité **[]**$^+$ est prise égale à zéro si elle est négative.

Pour les cavités avec un rapport d'aspect plus petit ($\mathrm{L/e}<12$), la corrélation de Catton (1978) peut être utilisée à condition que l'angle d'inclinaison soit inférieur à la valeur critique « α_{cr} » énumérée dans le tableau suivant :

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_{(\alpha=0°)}\left[\frac{\mathrm{Nu}_{(\alpha=90°)}}{\mathrm{Nu}_{(\alpha=0°)}}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha_{cr}}}\left(\sin\alpha_{cr}\right)^{\frac{\alpha}{4\alpha_{cr}}} \qquad 0°<\alpha<\alpha_{cr} \qquad (4.47)$$

L/e	1	3	6	12	>12
α_{cr}	25°	53°	60°	67°	70°

Pour des angles d'inclinaison supérieurs à la valeur critique, les corrélations de Catton et Ayyaswamy et Arnold, respectivement sont utilisées quel que soit la valeur du rapport d'aspect :

$$Nu = Nu_{(\alpha=90°)} (\sin\alpha)^{\frac{1}{4}} \qquad \alpha_{cr} < \alpha < 90° \qquad (4.48)$$

$$Nu = 1 + \left[Nu_{(\alpha=90°)} - 1 \right] \sin\alpha \qquad 90° < \alpha < 180° \qquad (4.49)$$

- **Cylindres concentriques :** Pour deux cylindres horizontales concentriques, les relations suivantes peuvent être utilisées pour gas et liquides avec 1 < Pr < 5000.

$$\begin{aligned} Nu &= 0.11 Ra^{0.29} \qquad 6.3\,10^3 \le Ra < 10^6 \\ Nu &= 0.40 Ra^{0.20} \qquad 10^6 \le Ra \le 10^8 \end{aligned} \qquad (4.50)$$

- **Sphères concentriques :** Pour deux sphères concentriques, la relation suivante est utilisée pour les gas et les liquides avec 0.7 < Pr < 4000.

$$Nu = 0.228 Ra^{0.226} \qquad 10^2 < Ra < 10^9 \qquad (4.51)$$

Remarque : Toujours, les propriétés thermophysiques du fluide sont déterminées à la température moyenne donnée par : $T_m = (T_1 + T_2)/2$. La longueur caractéristique est égale à l'épaisseur séparant les deux parois opposées maintenues respectivement à T_1 et T_2.

4.7. Exercices sur le chapitre

Exercice 01 : Le coefficient de transfert de chaleur convectif entre la paroi d'un tube et l'air circulant dans celui-ci a été déterminé expérimentalement. Les mesures ont indiqué les valeurs suivantes :

- ✓ h = 18.5 W/m^2.°C si la vitesse moyenne de l'air u_∞ = 3 m.s^{-1}
- ✓ h = 45.5 W/m^2.°C si la vitesse moyenne de l'air u_∞ = 10 m.s^{-1}

1. Déterminer les constantes a et b de la loi : $M = a \times Re^b$, si le diamètre du tube D = 4 cm, la masse volumique de l'air est ρ = 1.2 kg/m^3, la viscosité de l'air μ=1.7 10^{-5} kg/m.s, la chaleur massique de l'air C_p = 1003.2 J/kg°C et M représente le nombre de Margoulis appelé aussi nombre de Stanton donné par la relation : $M = \dfrac{h}{\rho u_\infty C_p}$
2. Quelle serait la valeur du coefficient de convection si la vitesse de l'air est de 7 m/s
3. Porter sur un graphique les valeurs de h, quelle serait alors la nature de l'équation h=*f*(u_∞)

Solution : Détermination des constantes a et b : $M = \dfrac{h}{\rho u_\infty C_p}$

On calcule le nombre de Margouillis et de Reynolds respectivement pour les deux expériences :

$$M_1 = \frac{18.5}{1.2 \times 3 \times 1003.2} = 5.12 \times 10^{-3} \qquad M_2 = \frac{45.5}{1.2 \times 10 \times 1003.2} = 3.77 \times 10^{-3}$$

$$Re_1 = \frac{\rho u_{\infty 1} D}{\mu} = 8470.58 \qquad Re_2 = \frac{\rho u_{\infty 2} D}{\mu} = 28235.29$$

En utilisant la corrélation de Margoulis, Nous aurons le système d'équation suivant :

$$M = a\,Re^b \Rightarrow \begin{cases} 5.12 \times 10^{-3} = a\,(8470.58)^b & (1) \\ 3.77 \times 10^{-3} = a\,(28235.29)^b & (2) \end{cases}$$

de l'équation (1), on peut tirer la valeur de la constante a :

$$a = \frac{5.12\times10^{-3}}{(8470.58)^{b}} \qquad (3)$$

On remplace la valeur de la constante a dans l'équation (2), on obtient :

$$3.77\times10^{-3} = \frac{5.12\times10^{-3}}{(8470.58)^{b}}(28235.29)^{b}$$

$$\frac{3.77\times10^{-3}}{5.12\times10^{-3}} = \left(\frac{28235.29}{8470.58}\right)^{b}$$

$$(3.33)^{b} = 0.73$$

$$b\ln(3.33) = \ln(0.73)$$

Il vient : $b = -0.26$

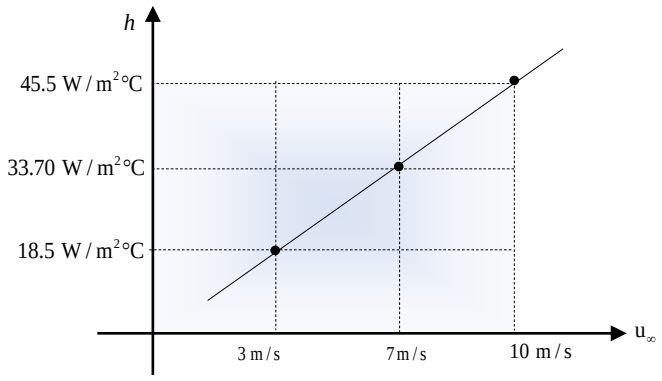
D'où, la valeur de la constante a est : $a = \frac{5.12\times10^{-3}}{(8470.58)^{-0.26}} = 0.05$

Finalement la corrélation donnant le nombre de Margoulis en fonction de Reynolds est donnée par l'expression suivante : $M = 0.05\,Re^{-0.26}$

2. Valeur du coefficient convectif « h » pour une vitesse de 7 m/s :

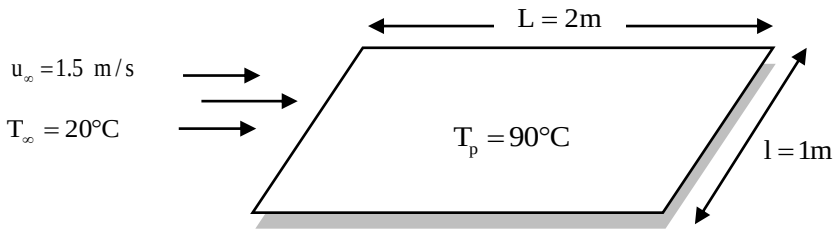
On calcule le nombre de Reynolds pour cette vitesse $Re_3 = \frac{\rho u_{\infty 3} D}{\mu} = 19764.70$ et donc $M_3 = 0.004$ d'où $h_3 = M_3 \rho u_{\infty 3} Cp = 33.70\ W/m^2.°C$

3. Equation de la droite : à partir du graphique, on constate que la variation du coefficient d'échange h et linéaire et suit une droite de la forme $h = au_{\infty} + b$



Exercice 02 : Une plaque mince d'une longueur de 2 m et d'une largeur de 1 m est sous l'effet d'un écoulement d'air à la vitesse de 1.5 m/s et de température de 20 °C dans la direction longitudinale. La température des surfaces de la plaque est de 90 °C. Calculer :

- Le coefficient de transmission de chaleur par convection suivant la longueur.
- Le flux de chaleur transmis par la plaque.



Solution :

Etape 01 : calcul de la température de moyenne T_m : $T_m = \dfrac{T_\infty + T_p}{2} = \dfrac{90+20}{2} = 55\ °C$,

Etape 02 : calcul des caractéristiques thermophysiques à la température moyenne :

$T_m = 55°C < 100°C$, donc on peut utiliser les corrélations du tableau 4.1, soit :

$\rho = \dfrac{353}{55+273} = 1.076\,kg/m^3$, $C_p = 1008\,J/kg.°C$

$\lambda = 7.57\times10^{-5}(55) + 0.0242 = 0.028\,W/m°C$, $\mu = 10^{-5}\times\left(0.0046(55)+1.7176\right) = 1.970\times10^{-5}\,Pa\,s$

$Pr = -2.54\times10^{-4}(55) + 0.7147 = 0.70$

Etape 03 : calcul du nombre de Nusselt. Il s'agit de la convection forcée sur une plaque plane horizontale, le nombre de Nusselt est calculé à l'aide des deux nombres adimensionnels Re et Pr. La longueur caractéristique dans ce cas est L = L :

Nombre de Reynolds :

$Re = \dfrac{\rho u_\infty L}{\mu} = \dfrac{1.076\times1.5\times2}{1.9706}\times10^5 \rightarrow Re = 1.638\times10^5 \le 5.10^5 \rightarrow$ l'écoulement est laminaire, le nombre de Nusselt moyen est donnée par :

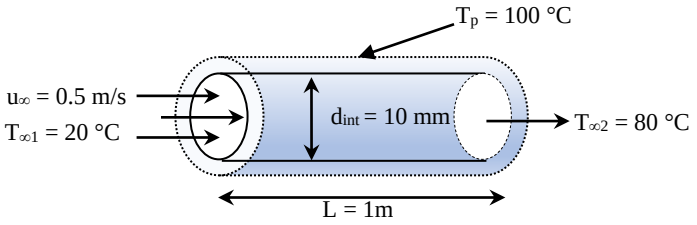
$$Nu = 0.664\,Re^{0.5}\,Pr^{0.33} = 0.664\times\left(1.638\times10^5\right)^{0.5}\times(0.7)^{0.33} = 238.895$$

Etape 04 : calcul du coefficient d'échange convectif h :

$$h = \frac{Nu\,\lambda}{L} = \frac{238.895\times0.028}{2} = 3.34\ W/m^2.°C$$

Le flux thermique échangé est donc : $\Phi = hS\left(T_p - T_\infty\right) = 3.34\times(2\times1)\times(90-20) = 467.6\,W$

Exercice 03 : Calculer le coefficient d'échange convectif ainsi que le flux dégagé lors de l'écoulement forcé d'une eau à la vitesse de 0.5 m/s dans un tube de 10 mm de diamètre et de 1 m de longueur si les températures moyennes de l'eau et de la paroi sont respectivement égales à 80 °Cet 20°C.



Solution :

Etape 01 : calcul de la température de moyenne T_m : $T_m = \dfrac{T_{\infty1} + T_{\infty2}}{2} = \dfrac{80+20}{2} = 50\ °C$

Etape 02 : calcul des caractéristiques thermophysiques à la température moyenne :

$T_m = 50\,°C < 100°C$, donc on peut utiliser les corrélations du tableau 4.1, soit :

$\rho = -0.00380(50)^2 - 0.0505(50) + 1002.6 = 990.575\,kg/m^3$, $C_p = 4180\ J/kg°C$

$\lambda = -9.87\times10^{-6}(50)^2 + 2.238\times10^{-3}\times(50) + 0.5536 = 0.64\ W/m°C$

$$\mu = \frac{17.9 - 0.07377(50) + 0.0003354(50)^2}{1 + 0.03032(50) + 8.765\times10^{-5}\times(50)^2}\times10^{-4} = 5.50\times10^{-4}\,Pa\,s$$

$$Pr = \frac{13.06 + 1.387(50) - 0.0037(50)^2}{1 + 0.12407(50) + 0.005297(50)^2} = 3.57$$

Etape 03 : calcul du nombre de Nusselt. Il s'agit de la convection forcée à l'intérieur d'un tube, le nombre de Nusselt est calculé à l'aide des deux nombres adimensionnels Re et Pr. La longueur caractéristique dans ce cas est $L = d_{int}$

Nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} = \frac{\rho u_\infty d_{int}}{\mu} = \frac{990.575 \times 0.5 \times 10 \times 10^{-3}}{5.50 \times 10^{-4}} = Re = 9005.23 > 2100$$, le régime est turbulent

On utilise la corrélation de Sieder et Tate : $Nu = 0.027\, Re^{0.8}\, Pr^{0.33} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14}$

A l'aide du tableau 4.1 $\left.\begin{array}{l} \mu_m = \mu(50\,°C) = 5.50 \times 10^{-4}\ Pa\,s \\ \mu_p = \mu(100\,°C) = 2.82 \times 10^{-4}\ Pa\,s \end{array}\right\}$

D'où : $Nu = 65.66$

Etape 04 : calcul du coefficient d'échange convectif h :

$$h = \frac{Nu\,\lambda}{L} = \frac{Nu\,\lambda}{d_{int}} = \frac{65.66 \times 0.64}{10 \times 10^{-3}} = 4202.24\ W/m^2.°C$$

Par conséquent, le flux thermique échangé :

$$\Phi = hS(T_\infty - T_p) = h\,\pi\, d_{int}\, L(T_\infty - T_p) = 4202.24 \times 3.14 \times 0.01 \times 1(80 - 20) = 7917.02\ W$$

Exercice 04 : Une barre de section circulaire de 15 mm diamètre extérieur est refroidie par un courant d'air externe transversal de vitesse u_∞ = 4 m/s et de température de 20 °C. Calculer la quantité de chaleur transmise à l'air par unité de longueur de la barre si la température de la paroi de cette dernière est de 80 °C.

Solution :

Etape 01 : calcul de la température de moyenne : $T_m = \frac{80 + 20}{2} = 50\,°C$

Etape 02 : calcul des caractéristiques thermophysiques à la température moyenne :

$T_m = 50\,°C < 100°C$, donc on peut utiliser les corrélations du tableau 4.1, soit :

$$\rho = \frac{353}{50 + 273} = 1.09\ kg/m^3,\ C_p = 1008\ J/kg.°C$$

$$\lambda = 7.57 \times 10^{-5} \times (50) + 0.0242 = 0.027\ W/m°C,\ \mu = 10^{-5} \times (0.0046) \times (50) + 1.7176 = 1.947 \times 10^{-5}\ Pa.s$$

$$Pr = -2.54 \times 10^{-4} \times (50) + 0.7147 = 0.702$$

Etape 03 : calcul du nombre de Nusselt. Il s'agit de la convection forcée à autour d'un tube, le nombre de Nusselt est calculé à l'aide des deux nombres adimensionnels Re et Pr. La longueur caractéristique dans ce cas est $L = d_{ext}$ et le nombre de Nusselt est donné par : $Nu = C(Re)^n$

$$Re = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} = \frac{\rho u_\infty d_{ext}}{\mu} = \frac{1.09 \times 4 \times 15 \times 10^{-3}}{1.947 \times 10^{-5}} = 3359.014 \rightarrow \quad 40 < Re < 4000$$

Le tableau 4.2 donne : $n = 0.466$ $C = 0.615$, le nombre de Nusselt est donc :

$$Nu = 0.615 \times (3359.014)^{0.466} = 27.045$$

Etape 04 : calcul du coefficient d'échange convectif h :

$$h = \frac{Nu\,\lambda}{L} = \frac{Nu\ \lambda}{d_{ext}} = \frac{27.045 \times 0.027}{15 \times 10^{-3}} = 48.681\ W/m^2.°C$$

La quantité de chaleur échangée par unité de longueur est donc :

$$\Phi = hS(T_p - T_\infty) = h\,\pi\, d_{ext} L(T_p - T_\infty) = 48.681 \times 3.14 \times 15 \times 10^{-3} \times (80 - 20) = 137.572\ W$$

Exercice 05 : On considère un faisceau de tubes d'une chaudière. Le diamètre extérieur des tubes est d_{ext} = 80 mm. Les pas sont de $\delta_1 = 2.5d_{ext}$ et $\delta_2 = 2d_{ext}$. L'écoulement forcée de l'air à la vitesse u_∞ = 10 m/s s'effectue dans le sens normal ($\alpha = 90°$) au faisceau qui comporte 4 rangés de tubes de même surface. Les températures de l'air à l'entrée et à la sortie du faisceau sont respectivement $T_{\infty 1}$ = 300 °C et $T_{\infty 2}$ = 180 °C.

On donne : Les caractéristiques thermophysiques de l'air à T_m = 240 °C sont : ρ = 0.688 kg/m^3, $\mu = 2.72\times10^{-5}$ m^2/s, λ = 0.04012 W/m.K, P_{rf} = 0.68, on admet pour l'air : $(P_{rf}/P_{rp}) = 1$

Déterminer le coefficient de transfert de chaleur global par convection forcée entre l'air et le faisceau pour les deux configurations suivantes :

a) Arrangement en ligne
b) Arrangement en quinconce.

Solution : Dans cet exercice, les caractéristiques thermophysiques sont données, on passera donc à l'étape 3 et 4. La longueur caractéristique dans ce cas est L = d_{ext} et le nombre de Nusselt est donné par l'équation 4.23.

On calcule d'abord le nombre Reynolds : $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho u_\infty d_{ext}}{\mu} = \dfrac{0.688\times10\times80\times10^{-3}}{2.72\times10^{-5}} = 20235.29$

a) Arrangement en ligne : Le tableau 4.3 donne : C = 0.26, n = 0.65

Calculons ensuite les coefficient ε_δ, ε_α et ε_i. D'après le tableau 4.3 :

- $\delta = \left(\dfrac{\delta_2}{d_{ext}}\right)^{-0.15} = \left(\dfrac{2d_{ext}}{d_{ext}}\right)^{-0.15} = 0.9$
- $\alpha = 90° \rightarrow \varepsilon_\alpha = 1$
- Pour les rangées 3 et 4, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$,

D'où : le nombre de Nusselt pour le Rangé 3 et 4 est donc :

$$Nu_3 = Nu_4 = 0.26\times(20235.29)^{0.65}\times0.68^{0.33}\times(1)^{0.25}\times0.901\times1\times1 = 126.836$$

$$Nu_1 = Nu_3\times0.6 = 76.102 \quad \text{et} \quad Nu_2 = Nu_3\times0.9 = 114.152$$

On en déduit :

$$h_1 = \frac{Nu_1\lambda}{d_{ext}} = \frac{76.102\times0.04012}{80\times10^{-3}} = 38.165 \text{ W/m}^2.°\text{C}, \; h_2 = \frac{Nu_2\lambda}{d_{ext}} = \frac{114.152\times0.04012}{80\times10^{-3}} = 57.247 \text{ W/m}^2.°\text{C}$$

et $h_3 = h_4 = \dfrac{Nu_3\lambda}{d_{ext}} = \dfrac{126.69\times0.04012}{80\times10^{-3}} = 63.535$ W/m^2.°C

Le coefficient d'échange convectif global est donc :

$$h = \frac{h_1+h_2+h_3+h_4}{4} = \frac{38.165+57.247+63.535+63.535}{4} = h = 55.6205 \text{ W/m}^2.°\text{C}$$

b) Arrangement en quinconce : Le tableau donne : C = 0.41, n = 0.6

Calculons ensuite les coefficient ε_δ, ε_α et ε_i. D'après le tableau 4.3 :

- $\dfrac{\delta_1}{\delta_2} = \dfrac{2.5\times d_{ext}}{2\times d_{ext}} = 1.25 < 2 \rightarrow \varepsilon_\delta = (1.25)^{\frac{1}{6}} = \varepsilon_\delta = 1.038$
- $\alpha = 90° \rightarrow \varepsilon_\alpha = 1$
- Pour les rangées 3 et 4, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$

D'où : le nombre de Nusselt pour le Rangé 3 et 4 est donc :

$$Nu_3 = Nu_4 = 0.41\times(20235.29)^{0.6}\times0.68^{0.33}\times(1)^{0.25}\times1.038\times1\times1 = 143.673$$

$$Nu_1 = Nu_3\times0.6 = 86.204 \text{ et } Nu_2 = Nu_3\times0.7 = 100.571$$

On en déduit :

$h_1 = \frac{Nu_1 \lambda}{d_{ext}} = \frac{86.204 \times 0.04012}{80 \times 10^{-3}} = 43.231\ W/m^2.°C$, $h_2 = \frac{Nu_2 \lambda}{d_{ext}} = \frac{100.571 \times 0.04012}{80 \times 10^{-3}} = 50.436\ W/m^2.°C$

et $h_3 = h_4 = \frac{Nu_3 \lambda}{d_{ext}} = \frac{143.673 \times 0.04012}{80 \times 10^{-3}} = 72.052\ W/m^2.°C$

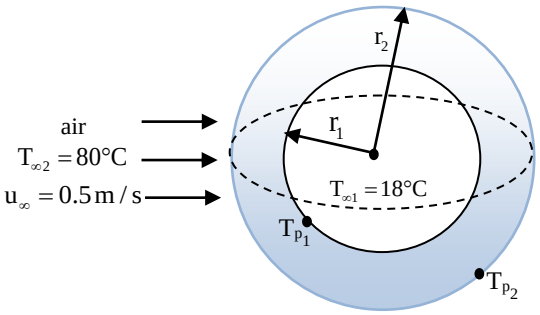
Le coefficient d'échange convectif global est donc :

$$h = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4} = \frac{44.231 + 50.436 + 72.052 + 72.051}{4} = h = 59.693\ W/m^2.°C$$

L'arrangement en quinconce permet une amélioration des échanges par convection de l'ordre de 6 % donc c'est le plus performent.

Exercice 06 : Soit une sphère creuse de rayon r_1 = 0.3 m et r_2 = 0.5 m ayant une conductivité thermique de 25 W/m.K (voir figure ci-dessous). Les coefficients d'échange convectif des milieux intérieur et extérieur sont respectivement à h_{int} = 10W/m^2.K et h_{ext} = ?. Sachant que la température de la paroi extérieure de la sphère est T_{p_2} = 40 °C. Calculer :

1. Le flux thermique échangé à travers la sphère
2. La température de la surface intérieure de la sphère T_{p_1}



Solution :

1. Calcul du flux échangé : calculons d'abord le coefficient d'échange convectif extérieur h_{ext}

Etape 01 : calcul de la température de moyenne : $T_m = \frac{T_\infty + T_{p_2}}{2} = \frac{80 + 40}{2} = 60\ °C$

Etape 02 : calcul des caractéristiques thermophysiques à la température moyenne : le tableau 4.1 donne : $\rho = 1.059\ kg/m^3$; $C_p = 1008\ J/kg.°C$; $\lambda = 0.0287\ W/m.°C$; $\mu = 1.59 \times 10^{-5}\ Pa.s$; $Pr = 0.70$; $\mu_f = 2.09 \times 10^{-5}\ Pa.s$; $\mu_p = 1.90 \times 10^{-5}\ Pa.s$

Etape 03 : calcul du nombre de Nusselt. Il s'agit de la convection forcée autour d'une sphère, le nombre de Nusselt est calculé à l'aide des deux nombres adimensionnels Re et Pr. La longueur caractéristique pour cette configuration est L = d_{ext} :

On calcule d'abord le Re : $Re = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} = \frac{\rho u_\infty d_{ext}}{\mu} = \frac{1.059 \times 0.5 \times 1}{1.59 \times 10^{-5}} = 0.226 \times 10^5$, le nombre de Nusselt pour cette configuration s'écrit : $Nu = 2 + \left(0.4\,Re^{0.5} + 0.06\,Re^{0.66}\right) Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_f}{\mu_P}\right)^{0.25}$

Or : $Nu = 2 + \left[0.4\left(2.66 \times 10^4\right)^{0.5} + 0.06\left(2.66 \times 10^4\right)^{0.66}\right](0.7)^{0.4} \left(\frac{2.05}{1.90}\right)^{0.25} = 104.278$

Etape 04 : calcul du coefficient d'échange convectif h :

$$h_{ext} = \frac{Nu\,\lambda}{d_{ext}} \simeq 3 \text{ W/m}^2.°C$$

Le flux thermique à pour expression :

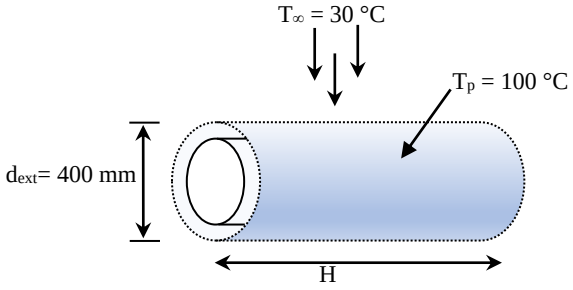
$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_{int} S_{int}} + \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{h_{ext} S_{ext}}} \text{ avec } S_{ext} = 4\pi r_2^2 \text{ et } S_{int} = 4\pi r_1^2$$

D'où : $$\Phi = \frac{80 - 18}{\frac{1}{10 \times 4\pi \times (0.3)^2} + \frac{0.5 - 0.3}{25 \times 4\pi \times (0.3) \times (0.5)} + \frac{1}{3 \times 4\pi \times (0.5)^2}} = 312.122 \text{ W}$$

2. Calcul de la température de la paroi interne : sachant que le flux est conservé, on peut écrire :

$$\Phi = \frac{T_{P_1} - T_{\infty 1}}{\frac{1}{h_{int} \times S_{int}}} = \frac{T_{P_1} - T_{\infty 1}}{\frac{1}{10 \times 4\pi \times (0.3)^2}} \Rightarrow T_{P_1} = 45.591°C$$

Exercice 07 : Calculer les pertes de chaleur par unité de temps et par unité de surface d'un échangeur horizontal dont le corps cylindrique est refroidi par un courant d'air libre de 30 °C de température. Le diamètre externe de la conduite est de 400 mm et la température de sa paroi est de 100 °C



Solution :

Etape 01 : calcul de la température de moyenne : $T_m = \frac{T_\infty + T_p}{2} = \frac{100 + 30}{2} = 65 \text{ °C}$

Etape 02 : calcul des caractéristiques thermophysiques à la température moyenne :

$T_m = 65°C < 100°C$, on peut donc utiliser les corrélations du tableau 4.1, soit :

$\rho = \frac{353}{65 + 273} = 1.04 \text{ kg/m}^3$, $C_p = 1008 \text{ J/kg.°C}$

$\lambda = 7.57 \times 10^{-5}(65) + 0.0242 = 0.029 \text{ W/m.°C}$, $\mu = 10^{-5} \times (0.0046 \times 65 + 1.7176) = 2.01 \times 10^{-5}$ Pa.s

$Pr = -2.54 \times 10^{-4}(65) + 0.7147 = 0.69$, $\beta = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{65 + 273} = 2.95 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

Etape 03 : calcul du nombre de Nusselt. Il s'agit de la convection naturelle à l'extérieur d'un cylindre horizontal, le nombre de Nusselt est calculé à l'aide de deux nombres adimensionnels Gr et Pr. La longueur caractéristique dans ce cas est L = d_{ext} et le nombre de Nusselt est donné par : $Nu = C(Ra)^n$

On calcule le Grachoff : $Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T d_{ext}^3}{\mu^2} = \frac{(1.04)^2 \times 9.81 \times 2.95 \times 10^{-3} \times (100 - 30) \times (400 \times 10^{-3})^3}{(2.01 \times 10^{-5})^2}$

$$Gr = 0.034 \times 10^{10}$$

D'où le nombre de Rayleigh : $Ra = Pr\,Gr = 2.3\times10^{2} \rightarrow 10^{3} < Ra < 10^{9}$, convection laminaire, le tableau 4.4 donne : $C = 0.53$ et $n = 0.25$, d'où, le nombre de Nusselt :

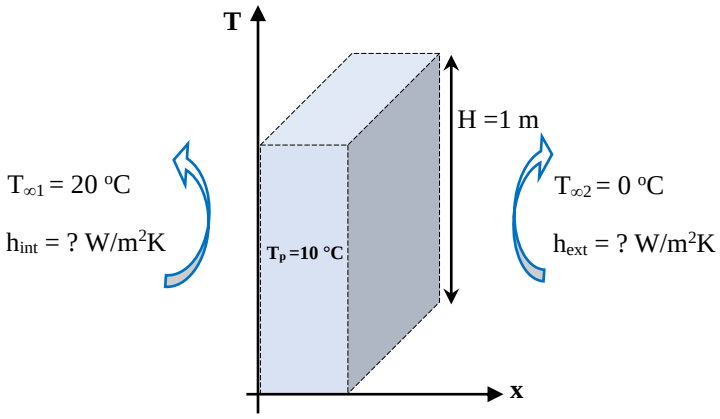
$$Nu = C\left(Gr\,Pr\right)^{n} = 0.53\times\left(2.3\times10^{2}\right)^{0.25} = 65.59$$

Etape 04 : calcul du coefficient d'échange convectif h :

$$h = \frac{Nu\,\lambda}{L} = \frac{Nu\ \lambda}{d_{ext}} = 4.75\ W/m^{2}°C$$

D'où, le flux thermique échangé est égal : $\Phi = h\,S\,\Delta T = 333.2\ W$

Exercice 08 : Une paroi plane verticale, de résistance thermique négligeable, d'une hauteur de 1 mètre sépare deux fluides : air à 20 °C et un autre air à 0 °C (voir figure ci-dessous). On suppose que la température des deux facettes est constante et égale à la moyenne des deux températures de fluides T_p =10 °C. Calculer les deux coefficients d'échange convectif.



Solution :

1. calcul du coefficient d'échange par convection interne h_{int} :

Etape 01 : calcul de la température de moyenne : $T_m = \frac{T_{\infty1} + T_p}{2} = \frac{20+10}{2} = 15°C$

Etape 02 : calcul des caractéristiques thermophysiques à la température moyenne :

$T_m = 15°C < 100°C$, donc on peut utiliser les corrélations du tableau 4.1, soit :

$$\rho = \frac{353}{15+273} = 1.22\ kg/m^{3},\ C_p = 1008\ J/kg.°C$$

$$\lambda = 7.57\times10^{-5}\left(15\right) + 0.0242 = 0.025\ W/m.°C,\ \beta = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{15+273} = 0.0034\times10^{-3}\ K^{-1}$$

$$\mu = 10^{-5}\left(0.0046\right)\left(15\right) + 1.7176 = 178\times10^{-5}\ Pa.s,\ Pr = -2.54\times10^{-4}\times\left(15\right) + 0.7147 = 0.71$$

Etape 03 : calcul du nombre de Nusselt. Il s'agit de la convection naturelle autour d'une plaque verticale, le nombre de Nusselt est calculé à l'aide des deux nombres adimensionnels Gr et Pr. La longueur caractéristique dans ce cas est L= H et le nombre de Nusselt est donné par :

$$Nu = C\left(Gr\,Pr\right)^{n}$$

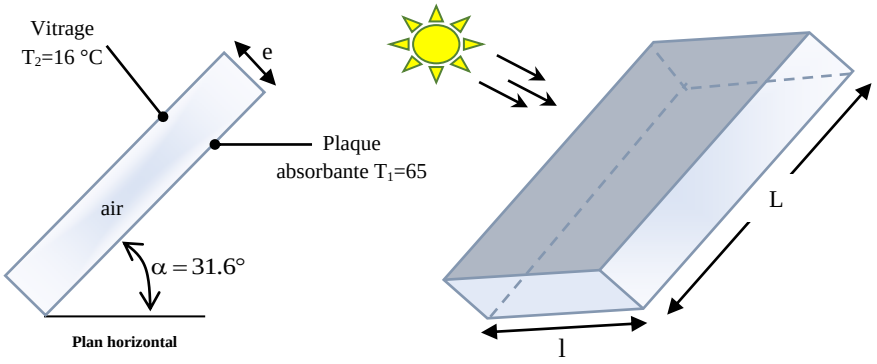
Avec : $Gr = \frac{g\beta\Delta T L^{3}}{\upsilon^{2}} = \frac{\rho^{2} g\beta\left(T_{\infty_1} - T_p\right)\times L^{3}}{\mu^{2}} = 1.55\times10^{9}$

Et le nombre de Rayleigh : $Ra = Pr\,Gr = 1.1005\times10^{9} > 10^{9}$, la convection est turbulente, le tableau 4.4 nous donne : C = 0.13 et n= 0.33, d'où $Nu = 125.199$

Etape 04 : calcul du coefficient d'échange convectif h : $h_{int} = \dfrac{Nu\,\lambda}{L} = 3.167\ W/m^2.°C$

2. Calcul du coefficient d'échange par convection externe h_{ext} : Pareillement, on suit les mêmes démarches, on trouve $h_{ext} = 3.232\ W/m^2.°C$

Exercice 09 : On s'intéresse au coefficient d'échange convectif dans un capteur solaire plan destiné à la production d'eau chaude sanitaire. La géométrie de ce capteur est assimilable à une cavité rectangulaire inclinée de dimensions (L = 1 m, l = 0.5 m et e = 2.5 cm), comme l'illustre la figure ci-dessous. Déterminer le coefficient d'échange convectif



Solution :

Etape 01 : on calcul la température de film T_f : $T_f = \dfrac{T_1 + T_2}{2} = \dfrac{65+16}{2} = 40.5\ °C$

Etape 02 : détermination des caractéristiques thermophysiques de l'air à 40.5 °C :

$$\rho = \frac{353}{40.5+273} = 1.125\ kg/m^3,\ C_p = 1008\ J/kg.°C$$

$$\lambda = 7.57\times10^{-5}(40.5) + 0.0242 = 0.026\ W/m.°C,\ \mu = 10^{-5}(0.0046\times40.5 + 1.7176) = 1.90\times10^{-5}\ Pa.s$$

$$Pr = -2.54\times10^{-4}.(40.5) + 0.7147 = 0.70,\ \beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{40.5+273} = 0.00318\,K^{-1}$$

Etape 03 : calcul du nombre de Nusselt : Pour un écoulement dans une cavité inclinée, le nombre de Nusselt est donné par :

$$Nu = 1 + 1.44\left[1 - \frac{1708}{Ra\cos\alpha}\right]^{+}\left(1 - \frac{1708(\sin1.8\alpha)^{\frac{1}{6}}}{Ra\cos\alpha}\right) + \left[\left(\frac{Ra\cos\alpha}{5830}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]^{+}$$

Calculons d'abord le nombre de Rayleigh : Ra = Gr×Pr

$$\text{Avec } Gr = \frac{\rho^2 g\beta(T_1 - T_2)L^3}{\mu^2} = \frac{(1.125)^2\times9.81\times0.00318\times(65-16)(0.025)^3}{(1.90\times10^{-5})^2} = 8.37\times10^4$$

Ce qui donne : $Ra = 8.37\times10^4\times0.70 = 6.11\times10^4$

$$\text{Et : } Nu = 1 + 1.44\left[1 - \frac{1708}{6.11\times10^4\cos31.6}\right]^{+}\left(1 - \frac{1708(\sin1.8\times31.6)^{\frac{1}{6}}}{6.11\times10^4\cos31.6}\right) + \left[\left(\frac{6.11\times10^4\cos31.6}{5830}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]^{+} = 3.51$$

Etape 04 : calcul du coefficient d'échange convectif :

$$h = \frac{Nu\times\lambda}{L} = \frac{3.51\times0.026}{0.025} = 3.65\ W/m^2.°C$$

5.1. Introduction

Le rayonnement thermique est important dans de nombreuses installations d'ingénierie, en particulier les dispositifs fonctionnants à des températures trop élevées : les échangeurs de chaleur, les chambres de combustion, les fours, etc. Une évaluation approfondie des échanges énergétiques radiatifs, s'avère nécessaire pour la conception et le fonctionnement aussi bien que pour des raisons de sécurité et de fiabilité de ces installations.

A l'inverse de des deux modes de transfert de chaleur conduction et convection, le rayonnement ne nécessite pas la présence d'un milieu matériel intermédiaire (solide ou fluide) pour en avoir lieu. On qualifie alors le rayonnement thermique, la quantité d'énergie cédée sous forme *d'ondes électromagnétiques* comprise 0.1 et 100 micromètres par un corps dont la température diffère du zéro absolu. C'est grâce au rayonnement thermique que le soleil nous transmet, presque instantanément, sa chaleur. Dans le vide le rayonnement devient le seul mode de transfert d'énergie même à basses températures. Le rayonnement se propage aussi dans un milieu qui lui est partiellement ou totalement transparent.

5.2. Démonstration du processus physique de rayonnement thermique

Considérons un solide chaud initialement à la température T_s suspendu dans une enceinte sous vide dont les parois sont à température ambiante « T_{amb} » (voir figure 5.1). Au bout d'un certain temps, le solide finira par se refroidir et atteindra avec son environnement l'équilibre thermique à la température « T_{eq} ». Il y a eu donc transfert de chaleur entre les deux corps. Par ailleurs, le transfert de chaleur entre le solide et l'enceinte n'aurait pas pu avoir lieu par conduction ou convection, car ces deux mécanismes nécessitent obligatoirement un support (solide ou fluide) et ne peuvent pas se produire dans le vide. Par conséquent, le transfert de chaleur n'a pu s'effectuer que par le biais d'un autre mécanisme qui implique l'émission de l'énergie interne de l'objet. Ce mécanisme est le rayonnement. L'exemple le plus évident et le plus important à notre échelle est celui du soleil. Ainsi, c'est grâce au rayonnement thermique que le soleil nous transmet, presque instantanément, sa chaleur.

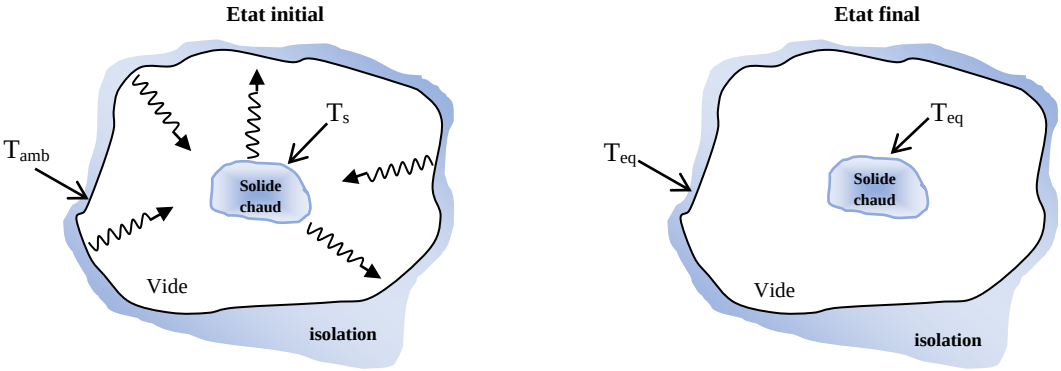


Figure 5.1 : Processus de transfert de chaleur par rayonnement

La propagation de l'énergie radiative peut être étudiée sous deux approches :

- ✓ La théorie classique de Maxwell : l'énergie est transportée sous forme d'ondes électromagnétiques.
- ✓ La théorie quantique : cette approche est presque impossible à appliquer à des problèmes d'ingénierie compliqués. Les ondes sont porteuses de quantité finie

d'énergie (paquets) ou photon suivant la loi de Planck : $E = h\nu$, où $h = 6.625\times10^{-34}$ J.s, est la constante de Planck, et ν est la fréquence (Hz).

5.3. Rayonnement électromagnétique

Selon la théorie de Maxwell, une onde électromagnétique consiste en un champ électrique E, un champ magnétique B, tous deux perpendiculaires (voir figure 5.2). L'onde se propage à la vitesse de la lumière c qui varie selon le milieu qu'elle traverse selon l'équation :

$$c = \frac{c_0}{n} \tag{5.1}$$

Avec : c_o = 2.9979×10^8 m.s^{-1} est la vitesse de la lumière dans le vide, « n » est l'indice de réfraction du milieu. Dans le vide, l'indice de réfraction est égal n ≡ 1. Pour la plupart des gaz, l'indice de réfraction est très proche de l'unité, par exemple : n_{air} = 1.00029 et n_{verre}= n_{eau} = 1.5 à la température ambiante. Les ondes électromagnétiques sont caractérisées par leur fréquence ν (Hz) et la longueur d'onde λ (μm) liés par la relation : $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{T}$

Où : ν = 1/T est la fréquence de l'onde électromagnétique.

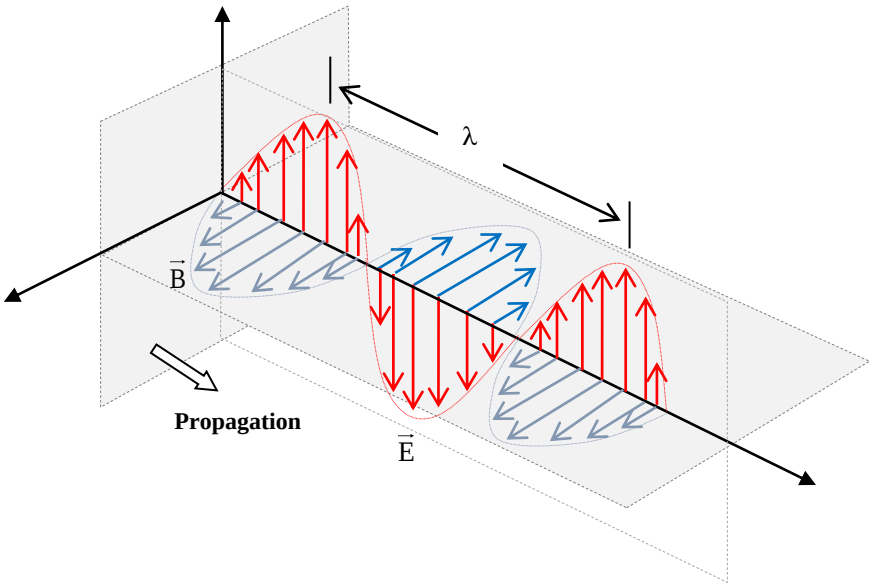


Figure 5.2 : Ondes électromagnétiques

Suivant leur longueur d'onde, les ondes électromagnétiques sont nommées selon la nomenclature définie sur la figure 5.3. Les ondes de longueur d'onde inférieure à 10^{-6} μm appartiennent à la catégorie des ***rayons cosmiques***, entre 10^{-5} à 10^{-4} μm, ce sont des ***rayons Gamma***, de 10^{-2} à10^{-4} μm, des ***rayons X***, de 10^{-2} à 0.4 μm des ***ultraviolets***.

Le domaine compris entre 0.1 μm à 100 μm est appelé ***rayonnement thermique*** ou nos sens sont capables de le percevoir sous la forme d'une sensation de chaleur. A l'intérieur du spectre thermique on trouve :

- ***Rayonnement solaire*** : 0.3 à 3 μm
- ***Spectre visible*** : c'est une bande plus étroite comprise entre 0.4 μm et 0.76 μm, le rayonnement devient visible par l'œil humain. Nous réserverons le nom de lumière exclusivement à cette partie. Dans le rayonnement visible, les différentes couleurs sont associées à des longueurs d'onde distinctes. Elles sont reportées sur le tableau

Couleurs	λ (µm)
Violet	0.4 - 0.44
Bleue	0.44 - 0.49
Vert	0.49 - 0.54
Jaune	0.54 – 0.60
Orange	0.60 - 0.67
Rouge	0.67 - 0.76

Tableau 5.1 : Spectre visible

- ***Rayonnement infrarouge IR*** : c'est sir William HERSCHEL qui, en 1800, grâce à l'utilisation d'un prisme dispersif, découvrit l'existence d'un rayonnement porteur de calories mais non visible à l'œil, et qui l'a appelé rayonnement infrarouge. Les infrarouges situent entre 0.76 et 100 µm.

Au-delà de 100 µm, on rencontre les ***ondes courtes*** (micro-ondes) puis les ***ondes radio***.

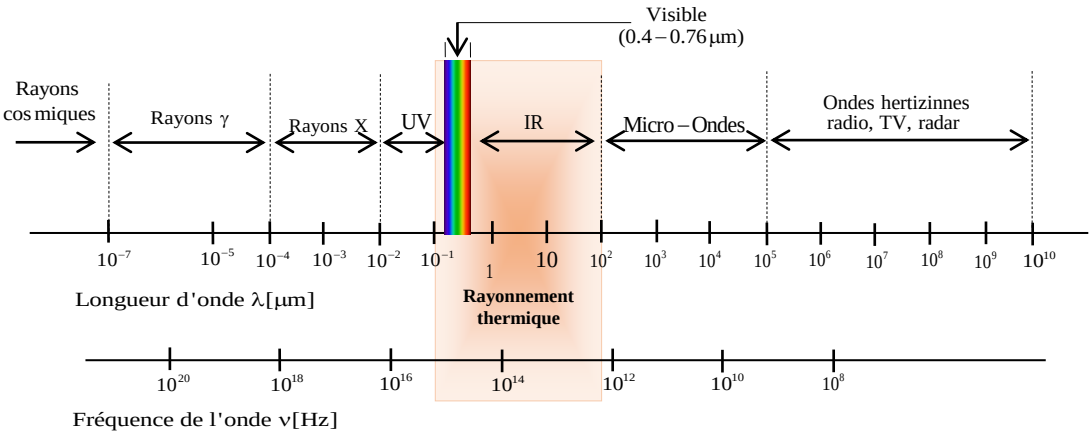


Figure 5.3 : Spectre des ondes électromagnétiques

5.4. Classification des grandeurs associées au rayonnement

La classification des grandeurs énergétiques dépend de la composition spectrale et la distribution spatiale de rayonnement (voir figure 5.4).

5.4.1. Composition spectrale

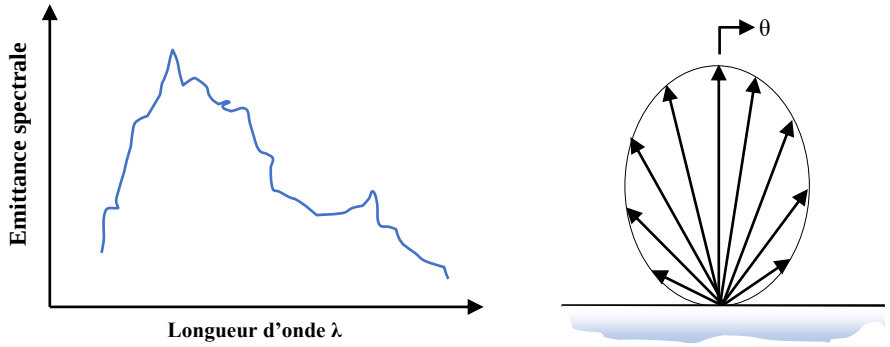
Le rayonnement est fonction de longueur d'onde, on distingue :

- **Grandeur monochromatique :** une grandeur radiative qui ne concerne qu'un intervalle spectral étroit dλ centré autour d'une longueur d'onde λ, on dit alors qu'elle est spectrale (spectriques pour les français) ou monochromatiques.
- **Grandeur totale** : il s'agit d'une grandeur associée à l'ensemble du spectre électromagnétique. On l'obtient donc en intégrant sur l'ensemble du spectre la grandeur monochromatique

5.4.2. Composition spatiale

Le rayonnement est fonction de la direction de propagation, on distingue :

- **Grandeur directionnelle :** qui ne concerne qu'une seule direction donnée dans l'espace.
- **Grandeur hémisphérique** : il s'agit d'une grandeur associée à l'ensemble des directions de l'espace. On l'obtient donc en intégrant sur de l'hémisphère la grandeur directionnelle



(a) distribution spectrale (b) distribution spatiale

Figure 5.4 : Rayonnement émis

5.5. Comportement d'une surface vis à vis le rayonnement

Lorsqu'un rayonnement est incident sur une surface, ce rayonnement sera en partie absorbé, réfléchit et transmis (voir figure 5.5). Ceci conduit à définir trois grandeurs : coefficient d'absorption α (ou ***absorptivité***), coefficient de réflexion ρ (ou ***réflectivité***) et coefficient de transmission τ (ou ***transmissivité***). Si on note G, G_{abs}, G_{ref} et G_{tr} les flux totaux incident, absorbé, réfléchi et transmis, le bilan thermique à la surface du matériau s'écrit :

$$G = G_{abs} + G_{ref} + G_{tr} \tag{5.2}$$

Pour la partie réfléchie on distingue :

- La réflexion ***spéculaire*** pour laquelle l'angle de réflexion égale l'angle d'incidence
- La réflexion ***diffuse*** pour laquelle le faisceau réfléchi est composé de rayons répartis dans le demi-espace.

Les fractions de chaque flux par rapport au flux incident sont définies alors :

Coefficcient d'absorption $\alpha = \frac{G_{abs}}{G}$ $0 \le \alpha \le 1$

Coefficcient de reflexion $\rho = \frac{G_{ref}}{G}$ $0 \le \rho \le 1$

Coefficcient de transmission $\tau = \frac{G_{tr}}{G}$ $0 \le \tau \le 1$

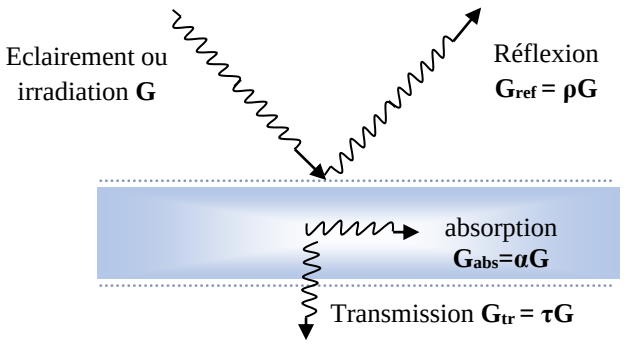


Figure 5.5. : Réception du rayonnement thermique par une surface

La conservation de l'énergie permet de déduire une première propriété reliant ces trois facteurs.

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \tag{5.3}$$

Les cas particuliers liés à cette expression sont :

- **Corps gris :** lorsque la surface est opaque, $\tau = 0$, l'expression 5.3 devient : $\rho + \alpha = 1$. Cette relation est très importante car elle nous permet de déterminer à la fois l'absorptivité et la réflectivité en mesurant l'une ou l'autre de ces propriétés. Cela signifie qu'un corps avec une bonne réflectivité possède une mauvaise absorptivité, et vice versa.
- **Corps blancs ou miroirs :** une surface parfaitement réfléchissante est caractérisée par une diffusion-réflexion totale du flux incident, $\alpha = 0$ et $\tau = 0$ soit : $\rho = 1$
- **Corps mats :** une surface mate est représentée par $\rho = 0$ donc : $\alpha + \tau = 0$
- **Corps transparents ou diathermiques :** une surface parfaitement transparente se laisse traverser par l'intégralité du flux incident dans ce cas $\alpha = 0$ et $\rho = 0$ et : $\tau = 1$
- **Corps noirs :** une surface noire est caractérisée par une absorption totale du flux incident $\rho = 0$ et $\tau = 0$ soit : $\alpha = 1$

N.B : Ces cas limites n'existent pas dans la nature, mais sont pourtant fort utiles (surtout le concept de corps noir) pour l'étude et le calcul lié aux échanges de chaleur par rayonnement.

5.6. Corps opaques émetteurs de rayonnement

Il est nécessaire d'introduire la définition d'un certain nombre de grandeurs intervenant dans l'étude des corps opaques considérés en tant qu'émetteurs de rayonnement.

5.6.1. Flux d'une source

On désigne ainsi la puissance thermique émise par une source dans tout l'espace où elle peut rayonner. Ce flux sera noté Φ et exprimé en Watt.

5.6.2. Luminance

Le rayonnement thermique émis par une surface plane, peut se propager dans toutes les directions de l'hémisphère au-dessus de cette surface. On distingue :

- ***Propagation isotrope ou diffuse*** : le rayonnement se propage d'une manière uniforme dans toutes les directions, il est donc indépendant de la direction de propagation.
- ***Propagation réelle*** : le rayonnement se propage d'une manière non uniforme dans toutes les directions, il correspond au cas réel.

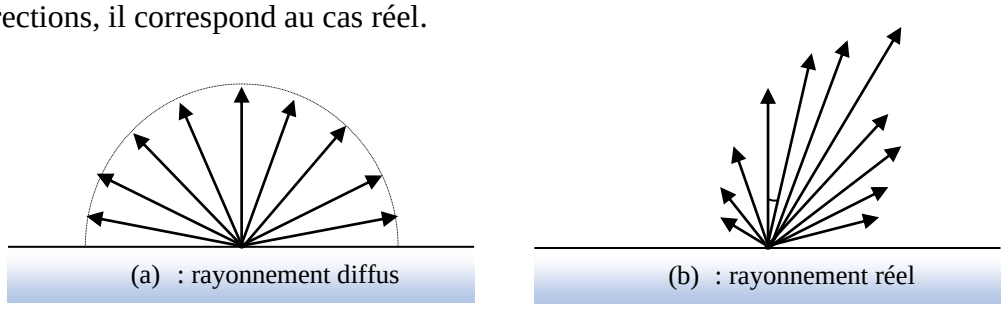


Figure 5.6 : Rayonnement diffus et réel

En réalité, la distribution directionnelle du rayonnement émis (ou incident) n'est pas uniforme. Par conséquent, nous avons besoin d'une quantité qui décrit le taux de transfert radiatif émis (ou incident) dans une direction spécifiée dans l'espace. Cette quantité s'appelle la luminance, notée « L ». Par ailleurs, cette direction est mieux décrite en coordonnées sphériques en termes d'angle zénithal θ et azimutal ϕ, comme l'indique la figure 5.7.

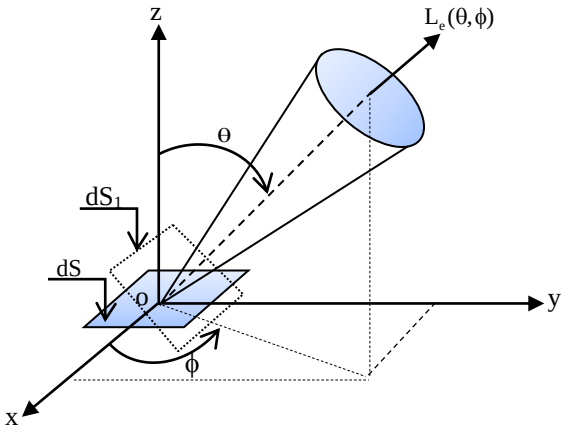


Figure 5.7 : Luminance du rayonnement émis

Nous avons considéré un rayonnement émis par une surface élémentaire dS dans une direction définie par les angles zénithal et azimutal dans l'hémisphère. Pour pouvoir évaluer la valeur du rayonnement émis, nous devons connaitre la taille de l'ouverture (cercle) dans l'espace par laquelle le rayonnement y passe. Ceci est défini par une notion très importante qui est l'angle solide

5.6.2.1. Angle solide

En géométrie plane, nous rappelons que l'angle « dθ » est défini par le rapport de la longueur d'arc « dl » au rayon « r » tel que : $d\theta = \frac{dl}{r}$. De même, l'angle solide « dΩ » est une généralisation de la notion d'angle plan dans l'espace. On le définit comme l'aire « dΩ » de la surface interceptée, sur une sphère de rayon unité (r = 1), par une surface conique dont le sommet est placé au centre de cette sphère (voir figure 5.8). L'angle solide est exprimé en stéradian (sr), mathématiquement il s'écrit sous la forme :

$$\frac{d\Omega}{1^2} = d\Omega = \frac{dS_n}{r^2} \qquad (5.4)$$

L'angle solide est obtenu en intégrant sur la surface totale considérée : $\Omega = \iint_{surface} d\Omega$

Par exemple, l'angle solide associé à l'ensemble de l'hémisphère peut être obtenu en intégrant sur les limites 0 à 2π et 0 à π/2, on obtient : $\Omega = \int_{hémisphère} d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi$ sr

- **Généralisation de la notion d'angle solide**

Si on prend un élément de surface quelconque infiniment petit dS' (assimilé à la surface d'un cercle infiniment petite) situé autour d'un point « M » et incliné d'un angle « θ » par rapport à « dS_n »(voir figure 5.9), on a $dS_n = dS'\cos\theta = dS'\vec{u}.\vec{n}$, d'où : $d\Omega = \frac{dS_n}{r^2} = \frac{dS'\cos\theta}{r^2} = \frac{dS'\vec{u}.\vec{n}}{r^2}$

Avec : $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dirigé dans le sens OM, $\vec{n}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à « dS' » au point « M ». On rappelle que le produit scalaire de deux vecteurs a pour expression : $\vec{u}.\vec{n} = |\vec{u}| \times |\vec{n}| \times \cos\theta = 1\times 1\times \cos\theta = \cos\theta$

Si l'élément de surface « dS_n » est perpendiculaire à « $\vec{OM}$ », l'angle « θ » est nul par conséquent $\cos\theta = 1$, on trouve finalement $d\Omega = \frac{dS_n}{r^2}$

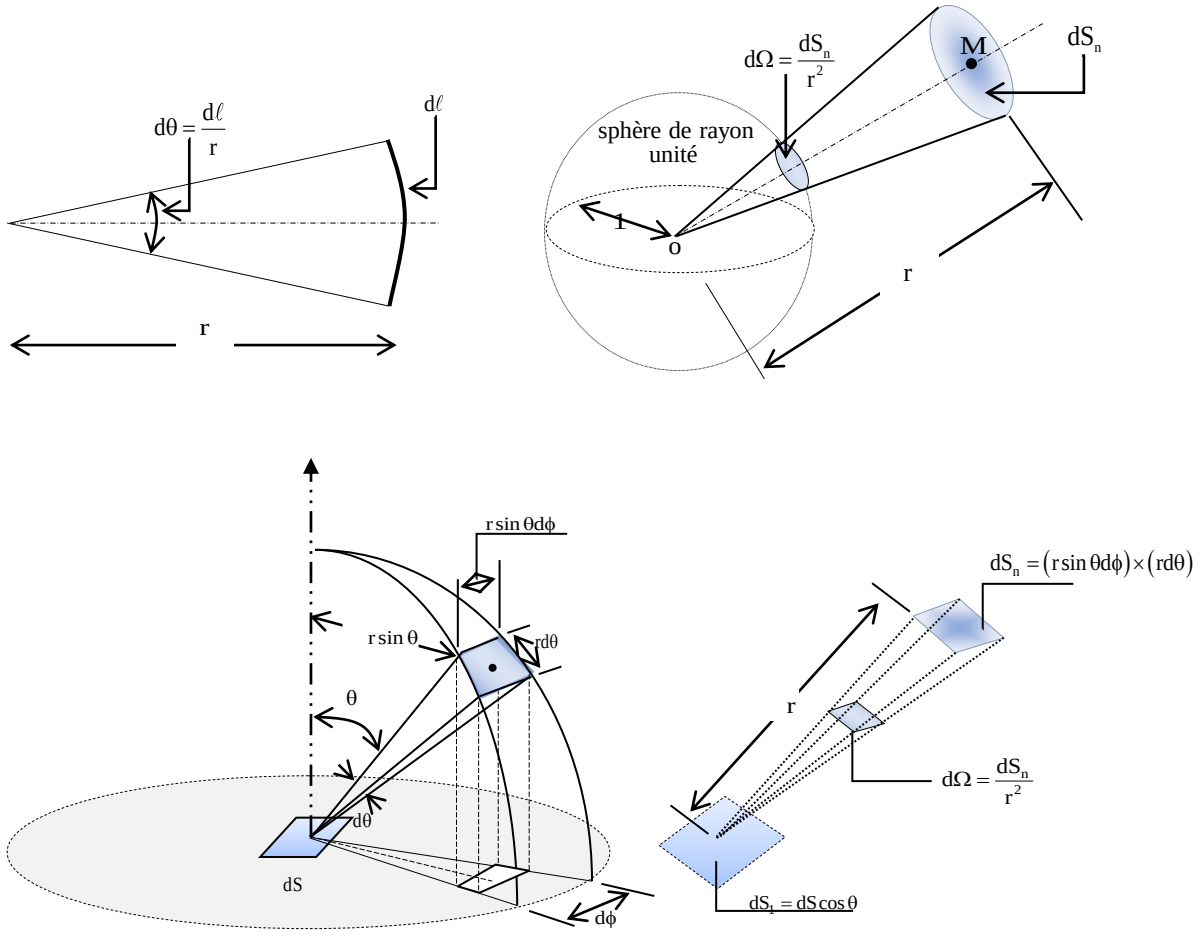


Figure 5.8: Angle solide

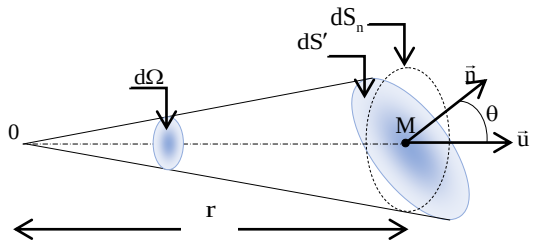


Figure 5.9 : Angle solide : généralisation

Exemple 5.1 : Quel est l'angle solide **Ω** sous lequel de la terre on voit le soleil, on donne :

- La distance moyenne terre-soleil est : $d_0 = 149\ 597\ 870$ km ;
- Le diamètre du soleil est : $d_s = 1.392 \times 10^6$ km

L'angle solide sous lequel le soleil est vu de la terre est : $\Omega = \int_{S_S} d\Omega = \int_{S_S} \frac{dS \cos\theta}{d_0^{\ 2}}$

En supposant que le soleil est au zénith du lieu d'observation : θ = 0, et cosθ = 1

$$\Omega = \pi \frac{\left(\frac{d_s}{2}\right)^2}{d_o^{\ 2}} = \pi \frac{1.392 \times 10^{6\ 2}}{4 \times\ 149597870^{\ 2}} = 6.796 \times 10^{-5} \text{ stéradians}$$

Nous appelons donc luminance « L » le taux de transfert d'énergie radiante « dΦ » émise dans la direction (θ,ϕ) par unité de surface perpendiculaire à cette direction, dS_1, par unité d'angle solide « dΩ » autour de cette direction.

$$L_e(\theta,\phi) = \frac{d\Phi}{dS_1 d\Omega} = \frac{d\Phi}{dS\cos\theta d\Omega} \quad (W/m^2 .sr) \tag{5.5}$$

La quantité $dS_1 = dS\cos\theta$ représente la projection de la surface émettrice dans la direction perpendiculaire à la direction d'émission. En introduisant l'expression de l'angle solide dans la relation 5.5, l'expression de la luminance devient :

$$L_e(\theta,\phi) = \frac{d\Phi}{dS\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi} \quad (W/m^2 .sr) \tag{5.6}$$

La quantité $\frac{d\Phi}{d\Omega}$ est appelé intensité, elle définit le flux rayonné par unité d'angle solide d'une source dans une direction donnée. Elle s'exprime en Watt par stéradian :

$$I(\theta,\phi) = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad (W/sr) \tag{5.7}$$

D'où la relation qui relie la luminance à l'intensité est de la forme :

$$L_e(\theta,\phi) = \frac{I_e(\theta,\phi)}{dS\cos\theta} \tag{5.8}$$

N.B : La notion de luminance ne peut s'appliquer aux sources ponctuelles (dS = 0), pour lesquelles n'existe que la notion d'intensité.

Exemple 5.2 : on considère une surface plane S_1 = 10 cm^2 rayonnant 1000 $W/m^2.sr$ de façon isotrope dans le sens normal. Une petite surface S_2 ayant la même aire est placée à une distance de 0.5 m par rapport à S_1 (voir figure 5.10). Déterminer

1- L'angle solide sous laquelle la surface réceptrice S_2 et vue depuis l'émetteur S_1
2- Le flux intercepté par la surface S_2

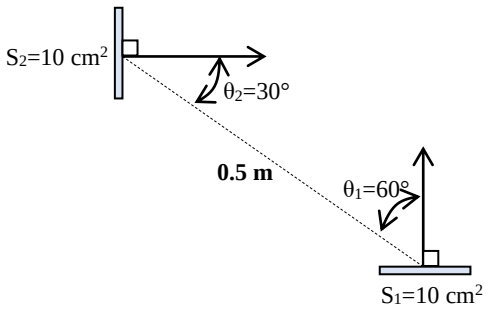


Figure 5.10 : Schéma de l'exemple 5.2

Solution : le rayonnement est isotrope, alors son intensité ne dépend pas de la direction d'émission (la même dans toutes les directions). La luminance est donc : $L_e = L_n = 1000\ W/m^2.sr$

- L'angle solide entre la surface 2 et la surface 1 est donné par la relation $d\Omega_{2\to1} = dS_{n,2}/r^2$, avec : $dS_{n,2}$ est la projection de la surface S_2 sur la direction normale du rayonnement provenant de la surface S_1, or $dS_{n,2} = dS_2\cos\theta_2$, d'où on a : $\Omega_{2\to1} = \frac{S_2\cos\theta_2}{r^2} = \frac{10^{-3}\times\cos 30}{0.5^2} = 0.00346\ sr$

- Le flux intercepté par la surface 2 peut se calculer par : $\Phi_{1\to2} = L_e S_1 \cos\theta_1 \Omega_{2\to1}$.

On trouve alors : $\Phi_{1\to2} = L_e S_1 \cos\theta_1 \Omega_{2\to1} = 1000\times10^{-3}\times\cos 60\times 0.00346 = 1.73\times10^{-3}\ W$

5.6.3. Loi de Lambert - loi de cosinus

Un corps dont la luminance reste indépendante de la direction considérée pour toutes les longueurs d'onde est dit obéir à la loi de ***Lambert***, ou ***lambertien***. Ce modèle de corps émet de façon isotrope et homogène ($L_e(\theta,\phi) = L$), l'équation 5.8 nous permet d'écrire donc :

$$\begin{cases} L_n = \dfrac{I_n}{dS},\ \cos\theta = 1\ (\theta = 0) \\ L_\theta = \dfrac{I_\theta}{dS\cos\theta} \end{cases} \underset{(L_n = L_\theta)}{\Rightarrow} I_\theta = I_n \cos\theta$$

Cette relation, c'est ce qu'on appelle loi de ***Lambert*** également appelée ***loi de cosinus*** qui montre que l'énergie émise par un élément de surface « dS » d'une source de Lambert dans une direction spécifiée est proportionnelle au cosinus que fait cette direction avec la normale.

La loi de ***Lambert*** mis en évidence en fait que l'intensité d'une source lambertienne n'est pas tout à fait la même selon l'angle « θ », et selon la valeur de l'angle « θ » l'intensité diminue.

Si on trace toutes les intensités, l'extrémité de l'intensité (indicatrice) décrit un cercle de rayon $r = I_n/2$ et de centre ($x = 0, y = I_n/2$).

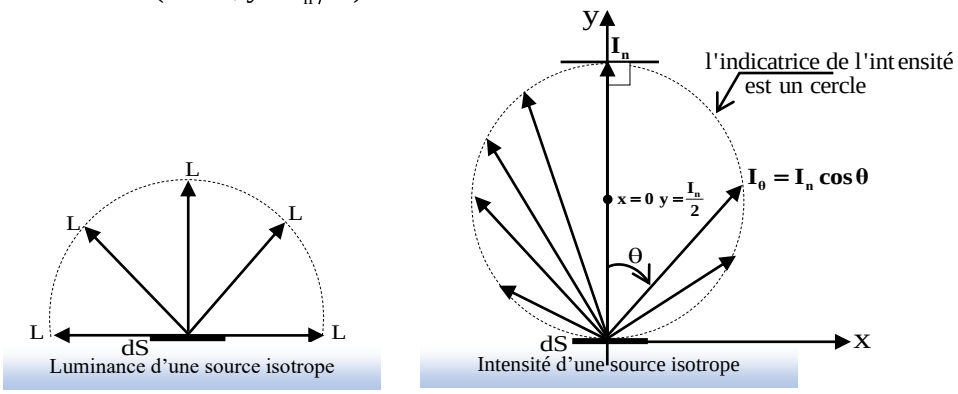


Figure 5.11: Indicatrice d'une source de *Lambert*

5.6.4. Emittance

Cette notion est introduite pour évaluer le rayonnement émis par unité de surface de surface de la source d'émission :

$$dM(\theta,\phi) = \frac{d\Phi}{dS} = L_e(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi \quad (W/m^2) \tag{5.9}$$

L'émittance hémisphérique s'obtient par intégration de l'émittance sur tout l'hémisphère entourant l'émetteur, elle est donnée par :

$$M = \int_{\text{hémisphère}} dM(\theta,\phi) = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} L_e(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi \quad (W/m^2) \tag{5.10}$$

<u>Remarque importante :</u> relation entre la luminance et l'émittance

Lorsqu'un corps suit la loi de ***Lambert*** : $L_e(\theta,\phi) = L_e$, l'équation 5.10, donne :

$$M = L_e \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta d\theta d\phi$$

Cette dernière relation s'intègre facilement de la façon suivante :

$$M = 2\pi L_e \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = 2\pi L_e \left[\frac{(\sin\theta)^2}{2} \right]_0^{\pi/2} = 2\pi L_e \left[\frac{1-0}{2} \right]$$

On trouve en définitif : $M = \pi L_e \quad (W/m^2)$ (5.11)

On peut conclure alors que : pour un corps ***Lambertien***, l'émittance et la luminance sont proportionnelle d'un ***facteur π***

5.7. Corps opaques récepteurs de rayonnement

Les notions de flux, d'intensité et de luminance s'appliquent aussi bien au rayonnement incident sur une surface qu'au rayonnement émis par celle-ci. Par contre, la notion d'émittance est remplacée dans le cas de rayonnement incident, par l'éclairement de la surface réceptrice.

5.7.1. Éclairement ou irradiation

Il désigne le flux incident reçu par unité de surface de récepteur perpendiculairement à la direction d'incidence. Le flux incident peut toujours s'exprimer à partir de la relation de luminance et donc l'éclairement peut lui aussi s'exprimer à partir de la luminance :

$$G = \int_{\text{hémisphère}} dG(\theta,\phi) = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} L_i(\theta,\phi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (W/m^2) \qquad (5.12)$$

Il faut bien noter que dans ce cas, la luminance est liée au flux incident (voir figure 5.12).

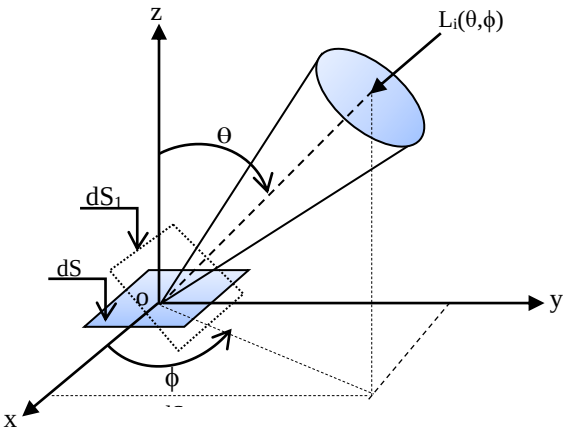


Figure 5.12: Rayonnement incident

Si l'éclairement est isotrope, il ne dépend alors plus des paramètres d'angle θ et ϕ. Dans ce cas on obtient la relation suivante pour l'éclairement hémisphérique :

$$G = \pi L_i \quad (W/m^2) \qquad (5.13)$$

5.7.2. Radiosité

La radiosité désigne la somme des flux émis par un corps et de la fraction de flux incident qui est réfléchi par ce même corps par unité de surface perpendiculaire à la direction d'émission réflexion. La radiosité est donc la somme de l'émittance et de la fraction d'éclairement réfléchit :

$$J = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} L_{e+r}(\theta,\phi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \ (W/m^2) \qquad (5.14)$$

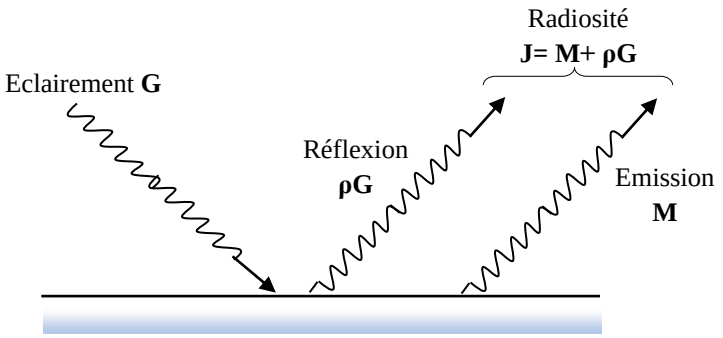


Figure 5.13: Eclairement et radiosité

$L_{e+r}(\theta,\varphi)$ est la somme des puissances émises et réfléchies. Pour une surface qui rayonne et reflète d'une manière isotrope, la luminance L_{e+r} est constante, d'où la relation de radiosité se réduit à :

$$J = \pi L_{e+r}\ (W/m^2) \tag{5.15}$$

Remarque : Pour un corps noir, la radiosité J est équivalente à l'émittance M^0 car un corps noir absorbe tout le rayonnement incident et il n'y a pas de composante réfléchie dans la radiosité.

5.8. Flux, intensité, émittance, et luminance spectrale

Nous avons considéré précédemment les grandeurs totales de rayonnement (quantités intégrées sur toutes les longueurs d'onde) et n'avons fait aucune référence à la dépendance à la longueur d'onde. Cette approche globale est adéquate pour de nombreux problèmes de rayonnement rencontrés dans la pratique. Cependant il est nécessaire parfois, de considérer la variation du rayonnement avec la longueur d'onde ainsi que la direction, et d'exprimer les grandeurs à une certaine longueur d'onde « λ » ou à un intervalle de longueur d'onde « dλ ». Ces quantités sont appelées quantités spectrales.

La luminance de rayonnement spectrale $L(\lambda,\theta,\phi)$, par exemple, est simplement la luminance totale de rayonnement $L(\theta,\phi)$ par unité de longueur d'onde. La luminance spectrale pour le rayonnement émis $L_{\lambda,e}(\lambda,\theta,\phi)$ a pour expression :

$$L_{\lambda,e}(\lambda,\theta,\phi) = \frac{d\Phi}{dS\cos\theta d\Omega d\lambda} \qquad (W/m^2.sr.\mu m) \tag{5.16}$$

L'émittance spectrale est donc :

$$M_\lambda = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} L_{\lambda,e}(\lambda,\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi\ (W/m^2) \tag{5.17}$$

Des relations similaires peuvent être obtenues pour l'irradiation spectrale G_λ et la radiosité spectrale J_λ en remplaçant $L_{\lambda,e}$ dans cette équation par $L_{\lambda,i}$ et $L_{\lambda,e+r}$ respectivement.

De même, lorsque les variations des flux de rayonnement spectral E_λ, G_λ et J_λ avec la longueur d'onde sont connues, les flux de rayonnement totaux peuvent être déterminés par intégration sur l'ensemble du spectre de longueur d'onde :

$$M = \int_{\lambda=0}^{\infty} M_\lambda d\lambda \qquad G = \int_{\lambda=0}^{\infty} G_\lambda d\lambda \qquad J = \int_{\lambda=0}^{\infty} J_\lambda d\lambda \tag{5.17}$$

Lorsque les surfaces et le rayonnement incident sont isotrope, on a :

$$M_\lambda = \pi L_{\lambda,e} \qquad G_\lambda = \pi G_{\lambda,i} \qquad J_\lambda = \pi J_{\lambda,e+r}$$

5.9. Corps noir : objet modèle

Le corps noir est un objet théorique idéal qui est utilisé comme référence, appelé aussi étalon de rayonnement ou radiateur idéal. A une température donnée, Il absorbe la totalité du rayonnement électromagnétique qu'il reçoit, sa réflectivité est donc nulle, et ceci quelques soient la longueur d'onde et la direction de propagation. De la même manière, il est capable d'émettre de manière ***isotrope*** *ou* ***diffuse*** (indépendante des angles θ et ϕ) la totalité du flux énergétique.

En pratique, le corps noir est modélisé par une cavité à paroi interne suffisamment absorbante et maintenue à une température constante (voir figure 5.14). La cavité est munie d'un petit trou par laquelle la lumière y entre et reste emprisonnée pour une durée infinie. La conséquence est que l'enceinte s'échauffe et finit par émettre un rayonnement qui est uniquement due à la température et qui correspond au spectre du corps noir.

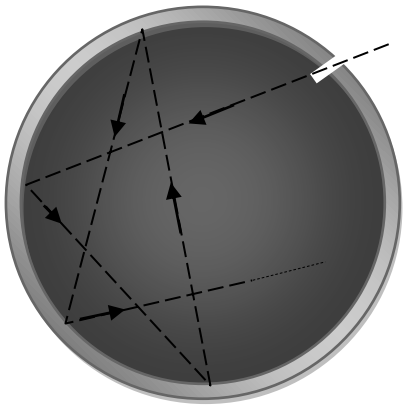


Figure 5.14 : Modèle théorique du corps noir

5.9.1. Lois du corps noir

Dans tout ce qui suit, les grandeurs relatives au corps noir seront affectées d'un indice supérieur « ^{0} » (Exemple : M^0, L^0,…).

5.9.1.1. Loi de Planck

A partir de la théorie quantique, Max Planck a établi la relation donnant la luminance énergétique monochromatique rayonnée par un corps noir en fonction de sa température thermodynamique « T » :

$$L_\lambda^0 = \frac{2h\,c^2\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda k\,T}\right)-1} \quad (W/m^2.sr.\mu m) \qquad (5.19)$$

Expression dans laquelle : λ est la longueur d'onde (en mètres ou micromètres), T est la température en K, $h = 6.625\times10^{-34}$ J.s est la constante de Planck, c est la vitesse de propagation des ondes électromagnétique dans le milieu traversé ($c = \frac{c_0}{n}$, avec n est l'indice de réfraction du milieu et $c_0 = 2.9979\times10^8 m/s$) et k est la constante de Boltzmann $k = 1.38\times10^{-23}$ J / K .

On peut exprimer la loi de Planck en terme d'émittance étant donné que $M_\lambda^0 = \pi L_\lambda^0$

Lorsque le rayonnement se propage dans un milieu dont l'indice de réfraction est égal à l'unité (c'est le cas du vide, ou de l'air, en première approximation) la loi de Planck s'exprime sous la forme suivante, qui est celle que l'on utilise dans la pratique courante :

$$M_\lambda^0 = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1\right]} \qquad (W/m^2.\mu m) \text{ ou } (W/m^3) \qquad (5.20)$$

C_1 et C_2 sont deux constantes physiques ont alors pour valeurs en unités S.I :

T	λ	$C_1 = 2\pi hc_0^2$	$C_2 = \frac{hc_0}{k}$	M_λ^0
K	**m**	3.741×10^{-16} W / m²	0.01439 mK	**W/m³**
	µm	3.741×10^{8} W.µm⁴ / m²	1.439×10^{4} µm K	**W/m².µm**

Tableau 5.2 : Constantes de la loi de Planck

Sur la figure 5.15, on présente l'évolution de l'émittance spectrale hémisphérique du corps noir en fonction de la longueur d'onde, pour différentes valeurs de la température absolue : 50, 100, 400, 800, 1000, 2000 et 5800 K.

La lecture de la figure 5.15, fait ressortir les observations suivantes :

- ✓ L'émittance est une fonction continue de λ.
- ✓ Pour une longueur d'onde donnée, l'émittance M_λ^0 augmente avec la température T.
- ✓ L'émittance admet un maximum pour une longueur d'onde λ_{max}
- ✓ La valeur de longueur d'onde λ_{max} varie avec la température, elle se déplace vers les courtes longueurs d'onde quand la température augmente.
- ✓ Une fraction importante du rayonnement émis par le soleil (qui est approchée par un corps noir à 5800 K) se trouve dans la région de spectre visible.
- ✓ Pour $T \leq 800\,K$, l'émission se trouve, d'une manière prédominante, dans la zone infrarouge du spectre et par conséquent elle n'est plus visible à l'œil.

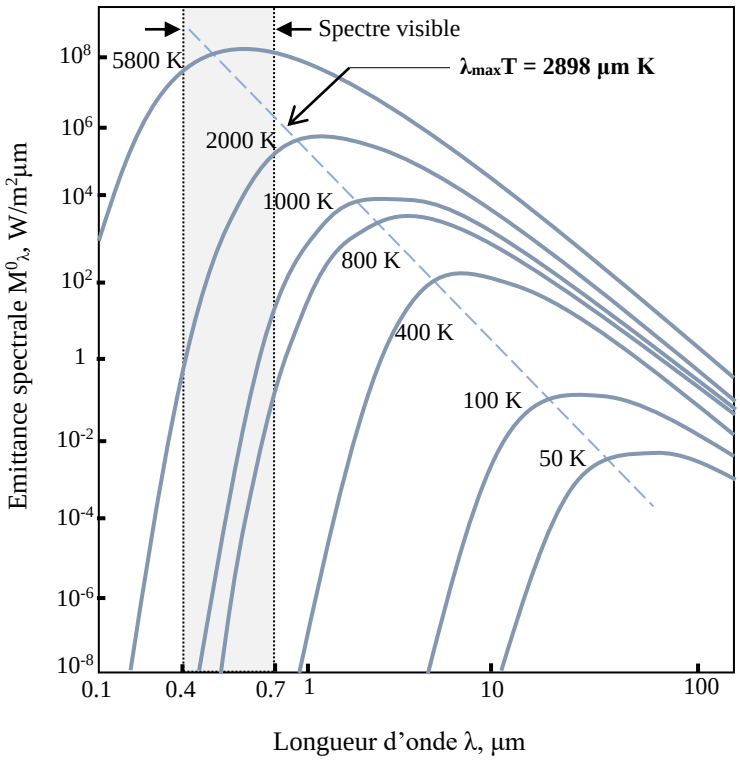


Figure 5.15 : Emittance monochromatique du corps noir

- **Approximation de la loi de Planck :** L'expression de Planck, admet des approximations simplificatrices, soit :

  - Pour les courtes longueurs d'onde $\lambda \le 5\,\mu m$ (visible et infrarouge-proche) le terme $e^{\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)}$ est grand devant 1, la formule de Planck devient : $M_\lambda^0 = C_1\lambda^{-5}e^{\frac{-C_2}{\lambda T}}$ (relation valable pour $\lambda T << 14000\,\mu m$)

  - Pour les grandes longueurs d'onde dans le lointain infrarouge le développement de $e^{\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)}$ permet d'écrire : $M_\lambda^0 = \dfrac{C_1 T}{C_2\lambda^4}$

Exemple 5.3 : on considère le soleil comme émettant un corps noir de température est égale à 5800 K. Déterminer la luminance au centre du spectre visible (à λ = 0.55 μm). Quelle est alors l'émittance spectrale hémisphérique émise

La luminance peut se calculer comme suit :

$$L_{0.55}^0 = \frac{\frac{C_1\lambda^{-5}}{\pi}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1} = \frac{\frac{3.741\times10^8}{3.14}.(0.55)^{-5}}{\exp\left(\frac{1.439\times10^4}{0.55\times5800}\right)-1} = 0.262\times10^8 \ W/m^2.sr.\mu m$$

D'où l'émittance spectrale hémisphérique est alors $M_\lambda^0 = \pi L_\lambda^0 = 0.822\times10^8 \ W/m^2.\mu m$

5.9.1.2. Lois de Wien

Il s'agit de deux lois qui fournissent respectivement l'abscisse et l'ordonnée du maximum d'émittance monochromatique du corps noir pour chaque température.

- **Première loi de Wien : loi de déplacement :** La figure 5.15 montre qu'avec l'augmentation de la température, les maximums de la courbe de se déplacent vers les longueurs d'onde les plus courtes. Les points correspondant au maximum de sont liées par la loi de déplacement de Wien.

La loi stipule que la longueur d'onde correspondant à la valeur maximale de l'émittance monochromatique est inversement proportionnelle à la température absolue T($\lambda_{max} \alpha 1/T$). C'est-à-dire, elle permet d'exprimer pour chaque valeur de longueur d'onde λ_{max} l'émittance monochromatique maximale.

Démonstration : La dérivée de l'émittance M_λ^0 de la loi de Planck (équation 5.20) par rapport à la longueur d'onde donne :

$$\frac{\left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1\right]C_1(-5)\lambda^{-6} - C_1\lambda^{-5}\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)\left(\frac{C_2}{T}\right)(-1)\lambda^{-2}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1} = 0$$

Or : $$-5C_1\left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1\right]\lambda^{-6} - \left(\frac{C_1C_2}{T}\right)\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)(-1)\lambda^{-7} = 0$$

Il vient : $$-\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)+\left(\frac{C_2}{5\lambda T}\right)\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)+1 = 0$$

En faisant le changement variable : $x = \left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)$, on obtient :

$$-\exp(x)+\frac{x}{5}\exp(x)+1 = 0$$

Après réarrangement, on trouve : $e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0$

Il s'agit alors d'une équation non linéaire dont la résolution se fait par voie numérique.

On remarque que cette équation admet la solution triviale x = 0. Il existe une autre solution pour x proche de 5 (car e^{-x} est négligeable). Alors on peut débuter le calcul par la valeur x = 5 et on trouve la nouvelle valeur de x et ainsi de suite utilisant la formule :

$$x_{i+1} = 5\times(1 - e^{-x_i})$$

Nombre d'itération	x_i	x_{i+1}
1	5	4.966310265
2	0.966310265	4.965155931
3	4.9650593	4.965115686
4	4.965112315	4.965114482

D'où : $x = \left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) = 4.965$, par conséquent :

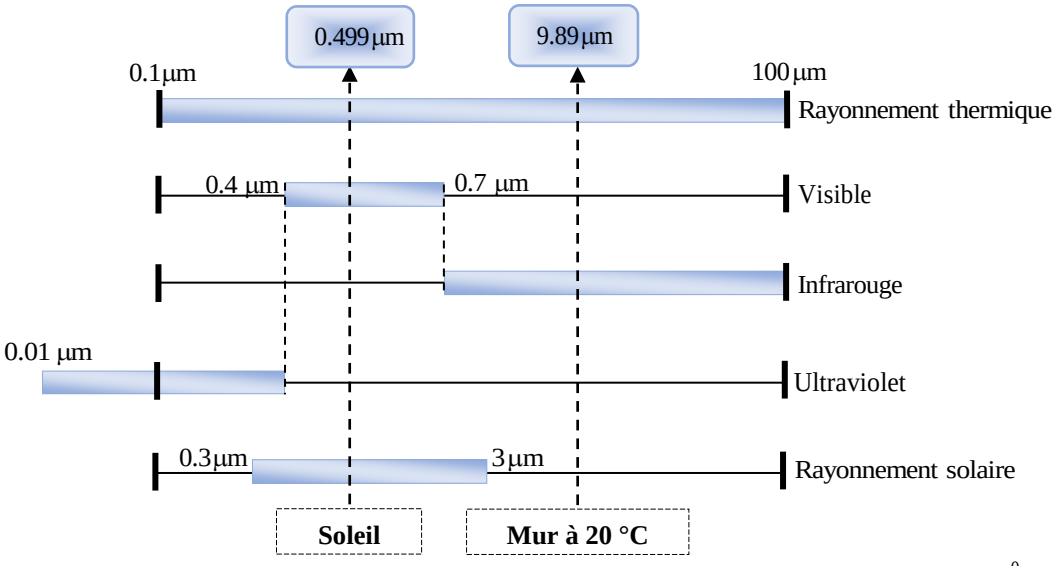
$$\lambda_{max} T = \left(\frac{14388}{4.965}\right) \approx 2898\,\mu mK = 0.002898\ mK \qquad (5.21)$$

Cette loi, est utilisée par les astrophysiciens dont le but est de déterminer la température des photosphères des étoiles, etc.

Exemple 5.4 : Déterminer la longueur d'onde maximale du soleil et d'un mur à la température de 5800 K et 20 °C respectivement

- Pour le soleil : $T = 5800\,K \Rightarrow \lambda T_{max} = 2898 \Rightarrow \lambda_{max} = 0.499\ \mu m$
- Pour le mur : $T = 293K \Rightarrow \lambda T_{max} = 2898 \Rightarrow \lambda_{max} = 9.89\ \mu m$

D'après le schéma ci-dessous, on constate que le soleil à la température de 5800 K, nous envoie le maximum de rayonnement dans le spectre visible, pour une longueur d'onde égale à 0.499 µm qui se situe pratiquement dans la couleur jaune (voir tableau 5.1) du spectre visible. Par contre, le mur à la température de 293 K émet principalement du rayonnement infrarouge à 10 µm que nous ne pouvons pas le percevoir avec l'œil nu.



• **Deuxième loi de Wien :** Cette loi, permet de déterminer l'émittance maximale $M^0_{\lambda_{max}}$. Pour ce faire, il suffit d'introduire l'expression de λ_{max} dans la loi de Planck, on obtient alors :

$$M^0_{\lambda_{max}} = B\,T^5 \qquad (5.22)$$

Relation dans laquelle, B est une constante rapportée sur le tableau suivant :

T	λ	B	$M^0_{\lambda_{max}}$
K	**m**	$1.287\times10^{-5}\ W/m^3.K^5$	**W/m^3**
	μm	$1.287\times10^{-11}\ W/m^2.\mu m\ .K^5$	**$W/m^2.\ \mu m$**

Tableau 5.3 : Valeur de la constante B de la 2ème loi de Wien

5.9.1.3. Loi de Stefan-Boltzmann

La loi de Stephan-Boltzmann fournit l'émittance totale du corps noir, en fonction de sa température absolue. C'est à dire le flux rayonné dans toutes les longueurs d'onde. Cette loi fut établie empiriquement par Stephan 1879, et démontrée théoriquement en 1884 par Boltzmann. On peut l'établir en intégrant l'émittance monochromatique donnée par la loi de Planck sur l'ensemble du spectre, soit :

$$M^0 = \int_0^\infty M^0_\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty \frac{C_1\lambda^{-5}}{\left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1\right]}$$

Faisons le changement de variable suivant : $x = \frac{C_2}{\lambda T}$ alors $\lambda = \frac{C_2}{xT}$ et $d\lambda = -\frac{C_2}{x^2T}dx$

Ce qui donne : $$M^0 = -C_1\int_0^\infty \frac{x^5\lambda^{-5}}{{C_2}^5\left[\exp(x)-1\right]}\times\frac{C_2}{x^2T}dx$$

$$= \frac{C_1T^4}{{C_2}^4}\int_1^\infty\left[\frac{x^3}{\exp(x)-1}\right]dx$$

Maintenant : $x^3\left[e^x-1\right]^{-1} = x^3\left[e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+e^{-4x}+...\right]$

Par conséquent : $M^0 = \frac{C_1T^4}{{C_2}^4}\int_0^\infty x^3\left[e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+e^{-4x}+...\right]dx$

L'intégrale se fait exactement, soit : $\int_0^\infty x^3e^{-nx}dx = \frac{3!}{n^{3+1}} = \frac{3!}{n^4}$

En définitif : $M^0 = \frac{C_1T^4}{{C_2}^4}\left[\frac{3!}{1^4}+\frac{3!}{2^4}+\frac{3!}{3^4}+...\right] = \frac{C_1T^4}{{C_2}^4}\left(\frac{6\pi^4}{90}\right)$

$$= 5.67\times10^{-8}T^4$$

Ou encore : $$M^0 = \sigma T^4 \qquad (5.23)$$

Avec, $\sigma = 5.67\times10^{-8}T^4\ \ W/m^2K^4$ est la constante de Stefan-Boltzmann

Exemple 5.5 : L'énergie émise dans la direction normale à partir d'une surface de corps noir se révèle avoir un rayonnement total par unité d'angle solide et par unité de surface de 10000 $W/m^2\cdot sr$. Quelle est la température de surface ?

Solution : La puissance émissive totale hémisphérique est liée à l'intensité totale dans la direction normale par $M^0 = \pi L^0$.

Par conséquent : $T = \sqrt[4]{M^0/\sigma} = \left(\pi L^0/\sigma\right)^{1/4} = \left(3.14\times10000/5.67\times10^{-8}\right) = 862.654\ K$

Exemple 5.6 : On considère une surface noire rayonnant avec une puissance émissive totale hémisphérique de l'ordre de 20 kW/m^2. Quelle est sa température de surface ? À quelle longueur d'onde son intensité spectrale est maximale ?

Solution : D'après la loi de Stefan-Boltzmann, la température du corps noir est calculée comme suit : $T = (M^0/\sigma)^{1/4} = (20\,000/\ 5.67\times10^{-8})^{\ 1/4} = 770.658$ K. Ensuite, d'après la loi de déplacement de Wien, on peut facilement calculer la longueur d'onde maximale : $\lambda_{max} = 2898 / T = 2898 / 770.658 = 3.76$ µm.

5.9.1.4. Fraction de l'émittance totale contenue dans un intervalle spectral donné

La loi de Stefan–Boltzmann $M^0 = \sigma T^4$ donne l'émittance totale émise par un corps noir à toutes les longueurs d'onde de $\lambda = 0$ à ∞. Cependant, on recherche souvent à calculer le flux émis dans une bande spectrale bien définie et non pas sur la totalité du spectre (voir figure 5.16). Par exemple : *quelle est la fraction de l'énergie solaire contenue dans le spectre visible*.

Nous définissons une quantité sans dimension F appelée la fonction de rayonnement du corps noir telle que :

$$F_{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda^0 d\lambda}{\int_0^{\infty} M_\lambda^0 d\lambda} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda^0 d\lambda}{\sigma\ T^4} \tag{5.24}$$

Que l'on peut écrire : $$F_{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{\sigma T^4}\left[\int_0^{\lambda_2} M_\lambda^0 d\lambda - \int_0^{\lambda_1} M_\lambda^0 d\lambda\right] = F_{0-\lambda_2} - F_{0-\lambda_1}$$

Nous cherchons donc à évaluer la quantité $F_{0-\lambda} = \frac{1}{\sigma T^4}\int_0^{\lambda} M_\lambda^0 d\lambda$

$F_{0-\lambda}$ Représentant la fraction de l'émittance du corps noir correspondant aux longueurs d'onde inferieures à une valeur « λ » pour chaque température « T » donnée. Pour ce faire, il semble que nous pouvons déterminer cette quantité en remplaçant la relation « $M^0{}_\lambda$ » dans l'équation de Planck et effectuer l'intégration :

$$F_{0-\lambda} = \frac{1}{\sigma T^4}\int_0^{\lambda} M_\lambda^0 d\lambda = \frac{1}{\sigma}\int_0^{\lambda} \frac{C_1}{\lambda^5 T^4\left(e^{C_2/\lambda T}-1\right)} d\lambda$$

Cependant il s'avère que l'intégration n'a pas de solution simple, et on doit recourir à des calculs numériques à chaque fois ce qui n'est pas pratique. Il serait donc utile de disposer d'une table fournissant pour chaque température la grandeur $F_{0-\lambda}$. Cependant l'inconvénient est qu'il faudrait une table à deux entrées, « λ » et « T ». Pour remédier à ce problème, on utilise « λT » comme variable unique or l'expression précédente peut être mise sous la forme :

$$F_{0-\lambda T} = \frac{1}{\sigma}\int_0^{\lambda T} \frac{C_1}{(\lambda T)^5\left(e^{C_2/\lambda T}-1\right)} d(\lambda T) = \frac{1}{\sigma}\int_0^{\lambda T} \frac{M_\lambda^0}{T^5} d(\lambda T) \tag{5.25}$$

IL suffit alors de dresser une table plus simple de la quantité $F_{0-\lambda T}$ (voir annexe tableau 5.4) avec une entrée unique en « λT » et de l'utiliser pour calculer la valeur de $F_{\lambda_2-\lambda_1}$ par l'intermédiaire de l'expression :

$$F_{\lambda_1-\lambda_2} = F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T} \tag{5.26}$$

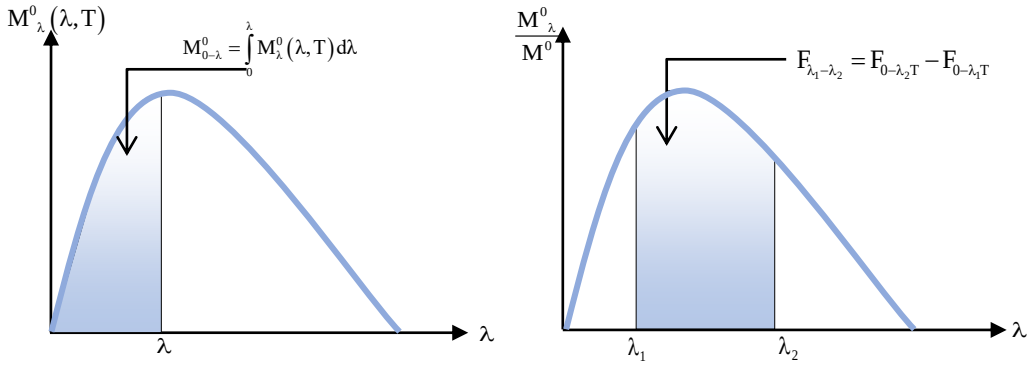


Figure 5.16 : Fraction de l'émittance du corps noir

Exemple 5.7 : La température d'un filament d'une ampoule à incandescence considéré comme un corps noir est maintenue à 2500 K. Calculer la fraction d'énergie émise par le filament dans le spectre visible (0.4−0.76 µm). Calculer également la longueur d'onde à laquelle l'émission atteint sa valeur maximale.

- $F_{\lambda_1\to\lambda_2}=?$, utilisant la tableau 5.4 (annexe) $\begin{cases}\lambda_1 T=0.40\times2500=1000 \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0\to1000}=0.321\times10^{-3}\\ \lambda_2 T=0.76\times2500=1900 \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0\to1900}=0.05215\end{cases}$

Donc : $F_{\lambda_1\to\lambda_2}=F_{0\to1900}-F_{0\to1000}=0.000321-0.05215=0.0518\approx5.18\%$. Cela signifie que 52% de l'énergie émise est rayonnée dans le visible.

- La longueur d'onde correspondant à l'émittance maximale est obtenue en utilisant la loi de déplacement de Wien : $\lambda_{max}T=2898\Rightarrow\lambda_{max}=\dfrac{2898}{T}$ $\underline{AN}: \lambda_{max}=1.15$ µm.

5.10. Les corps réels

Dans la section précédente, nous avons défini le concept de corps noir pour décrire le comportement d'un émetteur et un absorbeur idéal de rayonnement et nous avons dit qu'aucun corps ne peut émettre plus de rayonnement qu'un corps noir. Par conséquent, le corps noir peut servir alors de référence pratique pour décrire les caractéristiques d'émission et d'absorption de surfaces réelles, on définit donc :

5.10.1. Emissivité

L'émissivité ou bien coefficient d'émissivité thermique d'une surface est définie comme le rapport entre la rayonnement émis du corps réel et le rayonnement du corps noir équivalent à la même température. L'émissivité d'une surface est notée par « ε », elle est comprise entre 0 et 1. L'émissivité est une mesure de la façon dont une surface se rapproche d'un corps noir, pour laquelle (ε=1).

L'émissivité d'une surface réelle n'est pas une constante. Elle varie plutôt avec la température de la surface ainsi que la longueur d'onde et la direction du rayonnement émis. A cet effet, différentes émissivités peuvent être définies pour une surface :

- **Emissivité spectrale directionnelle :** représente le rapport de la luminance à une longueur d'onde spécifiée dans une direction spécifiée à la luminance du corps noir à la même température à la même longueur d'onde :

$$\varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda,\theta,\phi,T)=\frac{L_{\lambda,e}(\lambda,\theta,\phi,T)}{L^{0}_{\lambda}(\lambda,T)} \tag{5.27}$$

Où : λ et θ, ϕ désignent respectivement les quantités spectrales et directionnelles.

N.B : la luminance du corps noir représentée par le dénominateur est indépendante de la direction θ et ϕ.

- **L'émissivité totale directionnelle :** définie par le rapport de la luminance totale (intégrées sur toutes les longueurs d'onde) à la luminance totale du corps noir, soit :

$$\varepsilon_{\theta}(\theta,\phi,T)=\frac{L_{e}(\theta,\phi,T)}{L^{0}_{\lambda}(T)} \tag{5.28}$$

- **L'émissivité spectrale hémisphérique :** En pratique, il est convenable de travailler avec des propriétés moyennes dans toutes les directions, appelées propriétés hémisphériques. Rappelons que l'intégrale de la luminance à une longueur d'onde spécifiée par unité de surface sur l'ensemble de l'hémisphère est l'émittance spectrale, d'où l'émissivité spectrale hémisphérique peut être exprimée par la relation :

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda,T)=\frac{M_{\lambda}(\lambda,T)}{M^{0}_{\lambda}(\lambda,T)} \tag{5.29}$$

- **L'émissivité totale hémisphérique :** Enfin, le coefficient d'émission total hémisphérique est le rapport entre l'émittance totale hémisphérique et celle du corps noir équivalent :

$$\varepsilon(T)=\frac{M(T)}{M^{0}(T)}=\frac{M(T)}{\sigma T^{4}}$$

A partir de l'équation (5.17) et (5.29) : $M=\int_{0}^{\infty}M_{\lambda}d\lambda$ et $\varepsilon_{\lambda}(\lambda,T)=\frac{M_{\lambda}(\lambda,T)}{M^{0}_{\lambda}(\lambda,T)}$

L'émissivité totale hémisphérique devient :

$$\varepsilon(T)=\frac{\int_{0}^{\infty}\varepsilon_{\lambda}(\lambda,T)M^{0}_{\lambda}(\lambda,T)d\lambda}{\sigma T^{4}} \tag{5.30}$$

Pour évaluer cette intégration, nous devons connaître la variation de l'émissivité spectrale en fonction de la longueur d'onde à la température considérée. L'intégration est compliquée et ceci doit être effectué numériquement. Pour faciliter la tâche, l'intégration peut être réalisée assez facilement en subdivisant le spectre en un nombre suffisant de bandes de longueur d'onde et en supposant que l'émissivité reste constante sur chaque bande (voir figure 5.17). Ensuite, l'émissivité moyenne peut être déterminée par :

$$\varepsilon(T)=\frac{\varepsilon_{1}\int_{0}^{\lambda_{1}}M^{0}_{\lambda}d\lambda}{\sigma T^{4}}+\frac{\varepsilon_{2}\int_{\lambda_{1}}^{\lambda_{2}}M^{0}_{\lambda}d\lambda}{\sigma T^{4}}+\frac{\varepsilon_{3}\int_{\lambda_{2}}^{\infty}M^{0}_{\lambda}d\lambda}{\sigma T^{4}} \tag{5.31}$$

On remarque que l'émissivité moyenne est exprimée en une somme de trois fonctions de rayonnement du corps noir $F_{0\text{-}\lambda T}$ (équation 5.25), d'où on obtient :

$$\varepsilon(T)=\varepsilon_{1}F_{0-\lambda_{1}}+\varepsilon_{2}F_{\lambda_{2}-\lambda_{1}}+\varepsilon_{3}F_{\lambda_{2}-\infty} \tag{5.32}$$

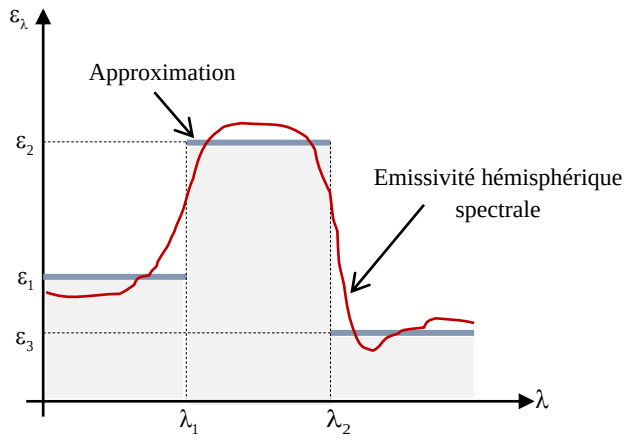


Figure 5.17 : Approximation de la variation réelle de l'émissivité

Les hypothèses de surfaces grises, diffuses, diffuses et grises sont souvent utilisées pour simplifier les calculs lors de l'étude de rayonnement. Le tableau suivant récapitule ces hypothèses :

Type de surfaces	Emissivités
Réelle	$\varepsilon_\theta \neq$ constant
Diffuse	$\varepsilon_\theta =$ constant
Grise	$\varepsilon_\lambda =$ constant
Diffuse est grise	$\varepsilon = \varepsilon_\lambda = \varepsilon_\theta =$ constant

Tableau 5.5 : Hypothèses pour l'émissivité des surfaces

N.B : l'évaluation de l'émission d'un corps réel se fera par rapport à celle du corps noir placé dans les mêmes conditions de température, pour les corps réels, on a : $M = \varepsilon M^0$

L'effet de l'approximation des surface grise sur l'émissivité pour d'une surface réelle est illustré sur la figure 5.19. On constate que l'émission d'une surface réelle, en général, diffère de la distribution de Planck, et la courbe d'émission peut avoir plusieurs pics. Une surface grise devrait émettre autant de rayonnement que la surface réelle qu'elle représente à la même température. Par conséquent, les zones sous les courbes d'émission des surfaces réelle et grise doivent être égales.

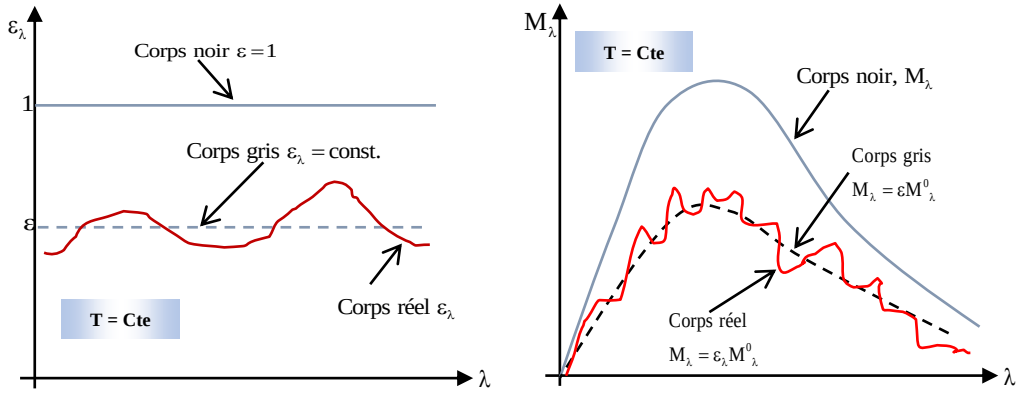


Figure 5.19 : Emissivité et émittance d'un corps réel, celle d'un corps gris et d'un corps noir à la même température.

Exemple 5.8 : Une surface dont la température est de 1 000 K émet avec l'émissivité hémisphérique spectrale représentée sur la figure ci-dessous. Les deux longueurs d'ondes caractéristiques sont : $\lambda_1 = 2$ µm et $\lambda_2 = 6$ µm. Déterminer l'émissivité hémisphérique totale ainsi que l'émittance hémisphérique totale à cette température.

D'après la définition de l'émissivité totale hémisphérique, nous avons :

$$\varepsilon(T) = \frac{1}{\sigma}\int_{\lambda T=0}^{2000} 0.1\frac{M_\lambda^0}{T^5}d(\lambda T) + \frac{1}{\sigma}\int_{\lambda T=2000}^{6000} 0.4\frac{M_\lambda^0}{T^5}d(\lambda T) + \frac{1}{\sigma}\int_{\lambda T=6000}^{\infty} 0.2\frac{M_\lambda^0}{T^5}d(\lambda T)$$

Cette relation est équivalente à : $\varepsilon(T) = \varepsilon_1 F_{0-\lambda_1 T} + \varepsilon_2\left(F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T}\right) + \varepsilon_3\left(F_{0-\infty} - F_{0-\lambda_2 T}\right)$

En utilisant le tableau 5.4, on trouve : $\varepsilon(T) = \varepsilon_1 F_{0\to 2000} + \varepsilon_2\left(F_{0\to 6000} - F_{0\to 2000}\right) + \varepsilon_3\left(F_{0\to\infty} - F_{0\to 6000}\right)$

Ceci donne : $\varepsilon(T) = 0.1\times 0.06672 + 0.4\times(0.73777 - 0.6672) + 0.2\times(1 - 0.73777) = 0.3275$

On en déduit l'émittance totale : $M = \varepsilon M^0 = \varepsilon\sigma T^4 = 0.3275\times 5.67\times 10^{-8}(1000)^4 = 18569.25\ \mathrm{W/m^2}$

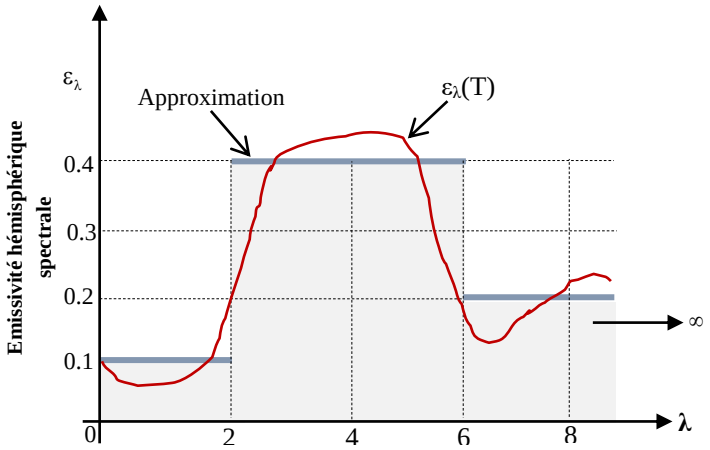


Figure 5.18 : Émissivité spectrale hémisphérique pour l'exemple 5.8

5.10.2. Absorptivité, réflectivité et transmitivité

L'absorptivité spectrale directionnelle et la réflectivité spectrale directionnelle d'une surface sont définies par les relations suivantes :

$$\alpha_{\lambda,\theta}(\lambda,\theta,\phi) = \frac{L_{\lambda,abs}(\lambda,\theta,\phi)}{L_{\lambda,i}(\lambda,\theta,\phi)} \qquad \text{et} \qquad \rho_{\lambda,\theta}(\lambda,\theta,\phi) = \frac{L_{\lambda,ref}(\lambda,\theta,\phi)}{L_{\lambda,i}(\lambda,\theta,\phi)} \tag{5.33}$$

De même, l'absorptivité spectrale hémisphérique, la réflectivité spectrale hémisphérique et la transmitivité spectrale hémisphérique d'une surface sont définies comme suit :

$$\alpha_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,abs}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \quad \text{et} \quad \rho_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,ref}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \quad \tau_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,tr}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \tag{5.34}$$

Où : G_λ est l'irradiation spectrale (en $W/m^2.\mu m$) incidente à la surface, $G_{\lambda,ref}$, $G_{\lambda,abs}$ et $G_{\lambda,tr}$, sont respectivement les parties réfléchies, absorbées et transmises.

L'absorptivité, la réflectivité, et la transmissivité moyennes (totales hémisphériques) peuvent également être données par :

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda}, \quad \rho = \frac{\int_0^\infty \rho_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda}, \quad \tau = \frac{\int_0^\infty \tau_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} \tag{5.35}$$

5.10.3. Loi de Kirchhoff - Relation entre émissivité et absorptivité

On considère deux surfaces parallèles, l'une est grise et l'autre est noire maintenues respectivement à « T » et « T^0 ». La surface grise émit un flux « Φ_{emet} » qui va entièrement être absorbée par la surface noire. Cette surface reçoit aussi un flux « M^0 » dont elle absorbe $\Phi_{abs} = \alpha \times M^0$. Simultanément elle émet un flux $\Phi_{emet} = (1-\alpha)M^0$. A l'équilibre thermique, le bilan énergétique à la surface grise s'écrit :

$$-\Phi_{emet} + M^0 - (1-\alpha)M^0 = 0$$

Cela donne :

$$\frac{\Phi_{emet}}{\alpha} = M^0 \qquad (5.36)$$

Cette relation est appelée loi de Kirchhoff, elle stipule que, le rapport du flux « Φ_{emet} » à l'absorptivité « α » est une constante pour tous les corps et équivaut à l'émittance d'un corps noir à la même température, elle est valide pour n'importe quel corps :

$$\frac{\Phi_{emet,1}}{\alpha_1} = \frac{\Phi_{emet,2}}{\alpha_2} = \frac{\Phi_{emet,}}{\alpha_3} = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\Phi_{emet,N}}{\alpha_N} = M^0 \qquad (5.37)$$

Conséquences : $\Phi_{emet,1} = \varepsilon M^0$, on obtient la deuxième forme de la loi de Kirchhoff appelée aussi loi de Draper :

$$\varepsilon = \alpha \qquad (5.38)$$

C'est-à-dire, l'émissivité totale hémisphérique est égale à l'absorptivité totale hémisphérique pour un rayonnement provenant d'un corps noir à la même température.

Si on considère l'aspect spectral, la relation précédente reste valable cependant il faut que l'irradiation soit diffuse ou que la surface soit diffuse, On a alors :

$$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda \qquad (5.39)$$

Si on considère en plus l'aspect directionnel, l'égalité est vraie et ne nécessite même plus la condition de rayonnement corps noir :

$$\varepsilon(\lambda, \theta, \phi) = \alpha(\lambda, \theta, \phi) \qquad (5.40)$$

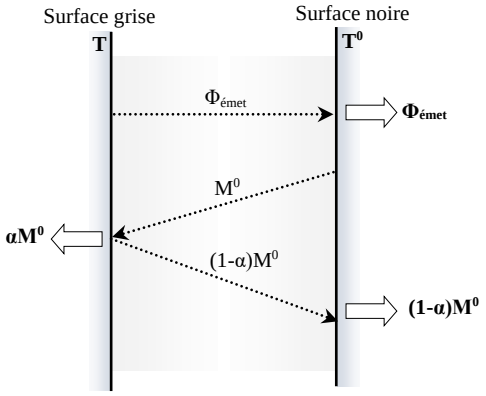


Figure 5.20 : Développement de la loi de Kirchhoff

Discussion de la loi de Kirchhoff : La loi de Kirchhoff a été établie en considérant la condition que la température de surface soit égale à la température de la source d'irradiation ce qui n'est pas toujours le cas quand une déférence (plus de quelques centaines de degrés) existe entre la température de surface et la température de la source d'irradiation. L'étude du comportement radiatif des matériaux a cependant montré que la relation $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$ reste valable, même en dehors des conditions d'équilibre thermique et cela aussi bien pour des grandeurs hémisphériques que directionnelles $\varepsilon(\lambda, \theta, \phi) = \alpha(\lambda, \theta, \phi)$, mais uniquement dans le cas de rayonnement

monochromatiques. Il n'est généralement pas possible (sauf quelques cas particuliers) d'étendre la loi de Kirchhoff au rayonnement total émis et absorbé par un corps, et d'écrire par conséquent $\varepsilon = \alpha$.

5.11. Calcul des échanges radiatifs entres surfaces

Dans cette partie du cours, nous allons étudier comment calculer les flux de chaleur radiatifs entre différentes surfaces. Les surfaces traitées seront d'abord supposées ***noires***, puis ***grises et diffusantes***. Selon les milieux qui séparent les surfaces, on distingue :

- ✓ ***Milieux participatifs dits non-transparents* :** ces derniers peuvent absorber et émettre le rayonnement. La plupart des gaz et vapeurs à molécule hétéropolaire tel que CO_2, H_2O, SO_2, NH_3, les vapeurs d'hydrocarbures et alcools, autrement dit la plupart des atmosphères présentes dans les équipements thermiques industriels, et en particulier les gaz de combustion que l'on trouve dans les fours, les chaudières et les moteurs à combustion interne.
- ✓ ***Milieux non-participatifs dits transparents* :** ces milieux participent aux échanges radiatifs en absorbant et émettant du rayonnement.

Au niveau limite de ce cours d'initialisation, nous allons nous intéresser particulièrement au deuxième cas.

5.11.1. Échanges radiatifs entre surfaces noires

Considérons deux éléments de surfaces noires « dS_1 » et « dS_2 » appartenant respectivement à « S_1 » et « S_2 » possédant respectivement les températures « T_1 » et « T_2 ». Ces éléments, sont arbitrairement orientés l'un par rapport à l'autre et pouvant rayonner mutuellement l'une vers l'autre (voir figure 5.21). Ecrivons l'expression du flux radiatif émis par « dS_1 » en direction de « dS_2 » et le flux émis par « dS_2 » en direction de « dS_1 ». Ce flux est donné par l'équation 5.5. Le flux radiatif émis par la surface « dS_1 » intercepté par « dS_2 » s'écrit alors :

$$d\Phi = L_1^o dS_1 \cos\theta_1 d\Omega_{12} .$$

L'angle solide est par définition : $d\Omega_{12} = \dfrac{dS_2 \cos\theta_2}{r^2}$.

Comme « S_1 » est Lambertienne ($M_\lambda^0 = \pi L_1^o$), on voit alors en remplaçant dans (5.5) que :

$$d\Phi_{12} = M_1^o \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2 \qquad (5.41)$$

Cette dernière relation est appelée formule de ***Bouguer***. Elle représente la base pour le calcul des échanges radiatifs entres surfaces.

De même, le flux émis par « dS_2 » et intercepté par « dS_1 » est donnée par :

$$d\Phi_{21} = M_2^o \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2 \qquad (5.42)$$

Pour évaluer le flux total émis par « S_1 » et arrivant sur « S_2 » il suffit d'intégrer sur « S_2 » puis sur « S_1 » :

$$\Phi_{12} = M_1^o \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2 \qquad (5.43)$$

De la même manière, le flux total émis par « S_2 » et arrivant sur « S_1 » s'obtient alors :

$$\Phi_{21} = M_2^o \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2 \qquad (5.44)$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$\Phi_{12} = M_1^o S_1 \times \frac{1}{S_1}\int_{S_1}\int_{S_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\pi r^2}dS_1dS_2 \quad \text{et} \quad \Phi_{21} = M_2^o S_2 \times \frac{1}{S_2}\int_{S_1}\int_{S_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\pi r^2}dS_1dS_2 \qquad (5.45)$$

Aboutissant finalement : $\Phi_{12} = S_1F_{12}M_1^o$ et $\Phi_{21} = S_2F_{21}M_2^o$ (5.46)

Relations dans lesquelles : $$F_{12} = \frac{\Phi_{12}}{S_1M_1^o} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{1}{S_1}\int_{S_1}\int_{S_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\pi r^2}dS_1dS_2 \qquad (5.47)$$

$$F_{21} = \frac{\Phi_{21}}{S_2M_2^o} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} = \frac{1}{S_2}\int_{S_1}\int_{S_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\pi r^2}dS_1dS_2 \qquad (5.48)$$

Les facteurs F_{12} et F_{21} sont des quantités purement géométriques, connus sous le nom de ***facteur de forme*** aussi appelé *facteur de configuration, facteur d'angle, facteur de vue*. Ils représentent la fraction du rayonnement total émis par la surface 1/2 intercepté par la surface 2/1.

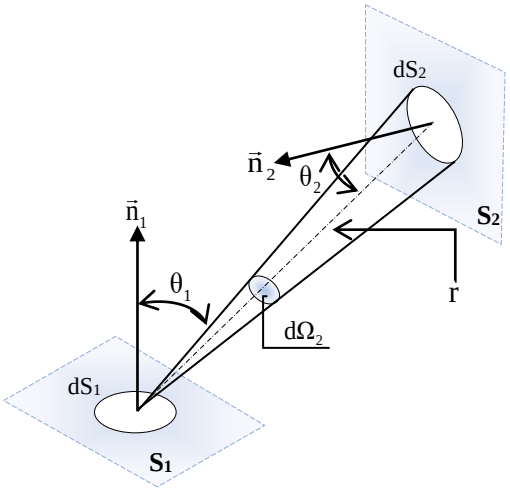
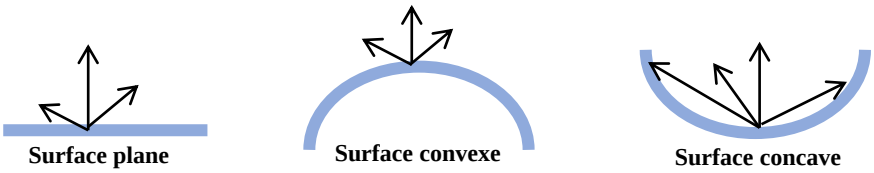


Figure 4.21 : Facteur de frome

Règles fondamentales des facteurs de forme

- Le facteur de forme est compris entre zéro et un.
- F_{ij} = 0 indique que deux surfaces ne se voient pas directement. F_{ij} = 1 indique que la surface j entoure complètement la surface i.
- F_{ii} = 0 pour les surfaces planes ou convexes et $F_{ii} \neq 0$ pour les surfaces concaves.



5.11.1.1. Relations entre facteurs de forme

- **Règle de réciprocité :** La symétrie des expressions de F_{12} et F_{21} conduit à la réciprocité des facteurs de forme.

$$S_1F_{12} = S_2F_{21}$$

Si bien que dans le cas d'échanges entre plusieurs surfaces on écrit :

$$S_iF_{ij} = S_jF_{ji}$$

Elle est seulement valable si les surfaces en question sont égales : $\begin{cases} F_{ji} = F_{ij} & \text{si} \quad S_i = S_j \\ F_{ji} \neq F_{ij} & \text{si} \quad S_i \neq S_j \end{cases}$

- **Règle de complémentarité ou de sommation :** Dans une enceinte fermée, composée de « N » surfaces « S_i » (i=1,2,3,…,N)

$$\sum_{j=1}^{N} F_{ij} = 1 \quad \text{pour i fixe}$$

Exemple : Pour une enceinte de 3 surfaces,

Surface 1, i=1 alors $F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1$

Surface 2, i=2 alors $F_{21} + F_{22} + F_{23} = 1$

Surface 3, i=3 alors $F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1$

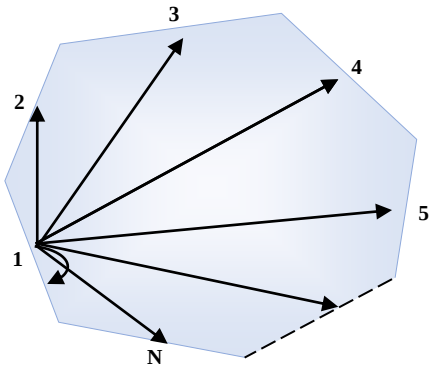


Figure 5.22 : Enceinte formée de surfaces noires

- **Conséquences des deux règles :** Pour une enceinte constituée de « N » surfaces, nous avons « N^2 » facteurs d'angle dont « N » peuvent être déterminés par la relation de sommation et « N(N -1)/2 » par celle de réciprocité.

Exemple 5.9 : Quels sont les facteurs de forme de deux sphères concentriques ?

On a N =2, $N^2 = 4$ (F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}) et N(N -1) /2 facteurs existent pour déterminer les autres donc 1. Puisque 1 ne se voit pas : $F_{11} = 0$. Puisque toute la radiosité de 1 est interceptée par 2 : $F_{12} = 1$ d'ailleurs $F_{11} + F_{12} = 1$. Par réciprocité, $F_{21} = S_1/S_2$. Par sommation, $F_{22} = 1 - S_1/S_2$

Exemple 5.10 : Quels sont les facteurs de forme de trois surfaces identiques disposées en triangle équilatéral ?

On a N =3, $N^2 = 9$ et N(N -1)/2 = 3 facteurs requis pour déterminer les 6 autres. Puisque 1, 2 et 3 ne se voient pas elles-mêmes : $F_{11} = 0$, $F_{22} = 0$, $F_{33} = 0$. Puisque toute la radiosité de 1 est interceptée également par 2 et 3 : $F_{12} = F_{13} = 0.5$ et réciproquement pour les autres surfaces.

Exemple 5.11 : Estimer les facteurs de forme des configurations suivantes :

(a) un corps noir à l'intérieur d'une enceinte noire, figure 5.23a.

(b) une sphère dans un cube, figure 5.23b.

(c) un demi-sphère par rapport à son plan de base, figure 5.23c.

(d) un demi cylindre par rapport à son plan de base, figure 5.23d.

On reamarque clairement que la surface 1 pour les différents cas est convexe, soit plane, d'où $F_{11}=0$. La surface 2 intercepte la totalité du rayonnement émis par la surface 1, d'où $F_{12}=1$

A partir de la relation de réciprocité, on a : $S_1F_{11} = S_2F_{21}$ ce qui donne $F_{21} = \frac{S_1}{S_2} = F_{12} = \frac{S_1}{S_2}$

Utilisant la règle de la sommation : $F_{21} + F_{22} = 1 \Rightarrow F_{22} = 1 - F_{21}$

Les résultats pour les différents cas sont récapitulés dans le tableau 5.6

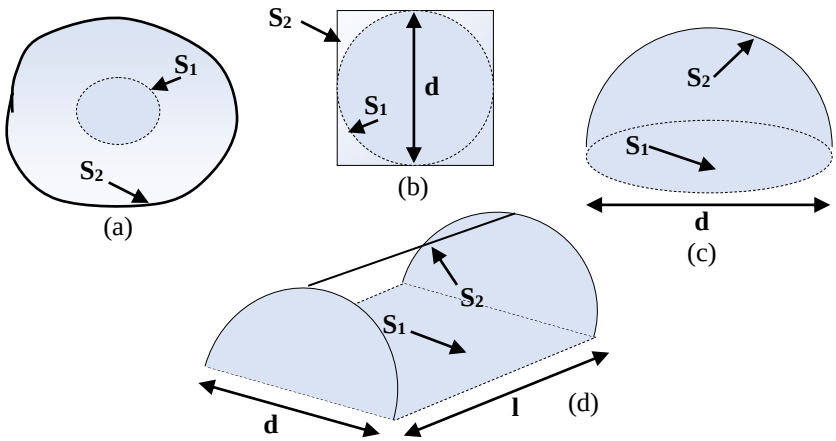


Figure 5.23 : Géométries de l'exemple 5.11

Cas	F_{11}	F_{12}	$F_{21}=S_1/S_2$	$F_{22}=1-F_{21}$
a	0	1	S_1/S_2	$1-S_1/S_2$
b	0	1	$\frac{\pi d^2}{6d^2}=\frac{\pi}{6}=0.5236$	$1-0.5236=0.4764$
c	0	1	$\frac{(\pi/4)d^2}{(\pi/2)d^2}=0.5$	$1-0.5=0.5$
d	0	1	$\frac{(\pi/4)d^2}{\pi dl+(\pi/2)d^2}=\frac{d}{d+4l}$	$1-\frac{d}{d+4l}=\frac{d}{d+4l}$

Tableau 5.6 : Résultats de l'exemple 5.11

- **Règle de subdivision ou de superposition :** On considère deux surfaces « S_1 » et « S_2 », on distingue :

- *Subdivision de la surface réceptrice* : Sur la figure 5.24a, la surface émettrice « S_2 » est subdivisée en deux zones « S_3 » et « S_4 ». Alors : $S_1F_{12}=S_1F_{13}+S_1F_{14}$

En générale cette équation exprime la règle de sommation forme : $F_{12}=\sum_{j=1}^{N}F_{1j}$

- *Subdivision de la surface émettrice :* Sur la figure 5.24b, la surface émettrice « S_1 » est subdivisée en deux zones « S_3 » et « S_4 ». Alors : $S_1F_{12}=S_3F_{32}+S_4F_{42}$

En générale cette équation peut s'écrire sous la forme : $S_iF_{ij}=\sum_{n=1}^{n}S_{in}F_{inj}$

La surface « S_i » est subdivisée en « S_{i1} », « S_{i2} », …, « S_{in} ».

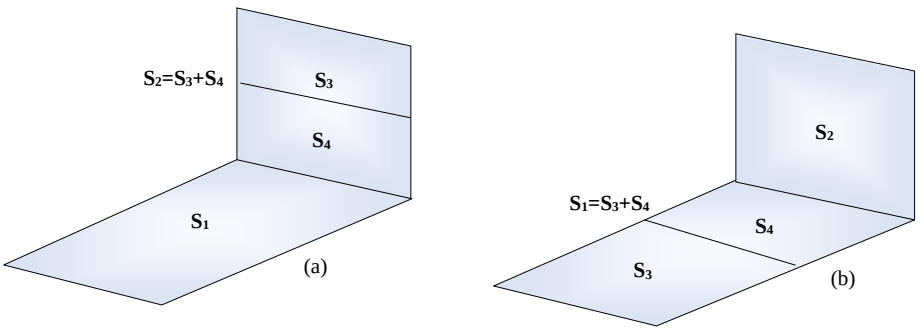


Figure 5.24. : Règle de subdivision : (a) subdivision de la surface réceptrice
(b) subdivision de la surface émettrice

- **Règle de symétrie :** cette règle stipule que les surfaces possédant une symétrie par rapport à une troisième surface auront des facteurs forme identiques à partir de cette surface (voir figure 5.25) : $F_{12} = F_{13}$ & $F_{21} = F_{31}$

En général, on peut écrire : $F_{ij} = F_{ik}$ & $F_{ji} = F_{ki}$

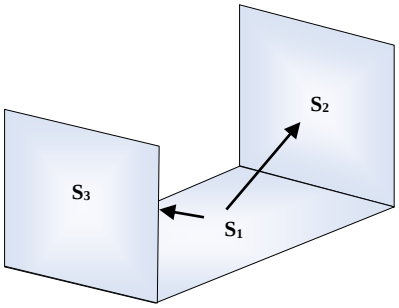


Figure 5.25 : Règle de symétrie

5.11.1.2. Estimation des facteurs de forme

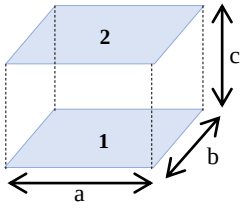
L'évaluation des facteurs de forme en utilisant les règles citées précédemment ne sera possible que pour des cas simples. Pour les géométries plus complexes, la détermination des facteurs de forme peut devenir très complexe en résolvant la double intégrale de l'équation 5.47.

Pour cela, des solutions ont été obtenues pour de nombreuses configurations sont disponibles sous forme relations analytiques et d'abaques.

Les résultats de plusieurs géométries courantes sont présentés dans les tableaux 5.7 et 5.8 et les figures 5.26 à 5.29. Le tableau 5.7 donne les facteurs de forme pour des géométries bidimensionnelles qui sont infinies dans la direction perpendiculaire au plan. Pour des géométries tridimensionnelles, les facteurs de forme sont donnés dans le tableau 5.8 sous forme de relations analytiques et dans les figures 5.26 à 5.29 sous forme graphique.

Configurations	Relations

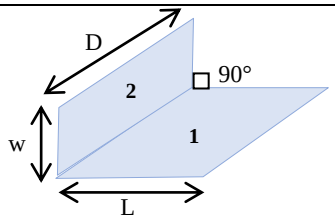
Cas1 : plans parallèles



$$X=\frac{a}{c}\ \text{et}\ Y=\frac{b}{c}$$

$$F_{12}=\frac{2}{\pi XY}\left\{\ln\left[\frac{\left(1+X^2\right)\left(1+Y^2\right)}{1+X^2+Y^2}\right]^{1/2}-X\tan^{-1}X-Y\tan^{-1}Y+X\sqrt{1+Y^2}\tan^{-1}\frac{X}{\sqrt{1+Y^2}}+Y\sqrt{1+X^2}\tan^{-1}\frac{Y}{\sqrt{1+X^2}}\right\}$$

Cas 2 : plans perpendiculaires

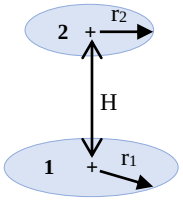


$$H=w/D\ \text{ et }\ Y=L/D$$

$$F_{12}=\frac{1}{\pi w}\left\{w\tan^{-1}\frac{1}{w}-\sqrt{H^2+w^2}\tan^{-1}\left(H^2+w^2\right)^{-1/2}+H\tan^{-1}\frac{1}{H}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\ln\left\{\left[\frac{\left(1+w^2\right)\left(1+H^2\right)}{1+w^2+H^2}\right]\times\left[\frac{w^2\left(1+w^2+H^2\right)}{\left(1+w^2\right)\left(w^2+H^2\right)}\right]^{w^2}\left[\frac{H^2\left(1+H^2+w^2\right)}{\left(1+H^2\right)\left(H^2+w^2\right)}\right]^{H^2}\right\}\right\}$$

Cas3 : disques parallèles coaxiaux



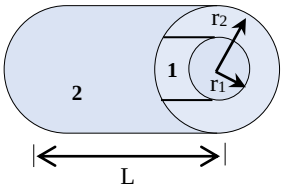
$$R_1=r_1/H,R_2=r_2/H\,\text{et}\,X=1+\left(1+R_2^2\right)/R_1^2$$

$$F_{12}=\frac{1}{2}\left[X-\sqrt{X^2-4\left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)^2}\right]$$

$$\text{si}\ r_1=r_2,R=R_1=R_2=r/H:F_{12}=F_{21}=1+\frac{1-\sqrt{4R^2+1}}{2R^2}$$

Cas 4 : deux cylindres concentriques de longueur finie

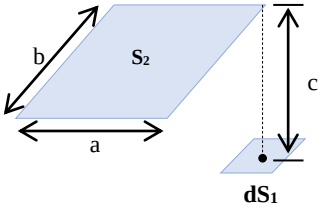
$$R=r_2/r_1,\ M=L/r_1,\ A=M^2+R^2-1,B=M^2+R^2+1\ \text{et}\ X=\frac{4\left(R^2-1\right)+\left(M^2/R^2\right)\left(R^2-2\right)}{M^2+4\left(R^2-1\right)}$$



$$F_{21}=\frac{1}{R}-\frac{1}{\pi R}\left\{\cos^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)-\frac{1}{2M}\left[\sqrt{\left(A+2\right)^2-4R^2}\cos^{-1}\left(\frac{B}{RA}\right)+B\sin^{-1}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{\pi A}{2}\right]\right\}$$

$$F_{21}=1-\frac{1}{R}+\frac{2}{\pi R}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{R^2-1}}{M}\right)-\frac{M}{2\pi R}\left[\frac{\sqrt{4R^2+M^2}}{M}\sin^{-1}\left(\frac{4\left(R^2-1\right)+\frac{M^2}{R^2}\left(R^2-2\right)}{M^2+4\left(R^2-1\right)}\right)-\sin^{-1}\left(\frac{R^2-2}{R^2}\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{4R^2+M^2}}{M}-1\right)\right]$$

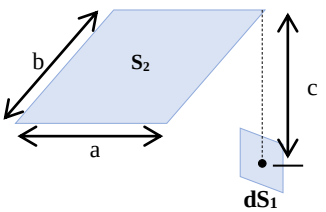
Cas 5 : surface différentielle parallèle à une surface rectangulaire finie



$$X=b/c\ \text{ et }\ Y=a/c$$

$$F_{12}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{X}{\sqrt{1+X^2}}\tan^{-1}\frac{Y}{\sqrt{1+X^2}}+\frac{Y}{\sqrt{1+Y^2}}\tan^{-1}\frac{X}{\sqrt{1+Y^2}}\right)$$

Cas 6 : surface différentielle perpendiculaire à une surface rectangulaire finie



$$X=c/b\ \text{ et }\ Y=a/b$$

$$F_{12}=\frac{1}{2\pi}\left(\tan^{-1}\frac{1}{X}+\frac{Y}{\sqrt{1+\left(Y/X\right)^2}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{X+Y^2}}\right)$$

Tableau 5.7 : Facteurs de forme : géométries 2D infinies

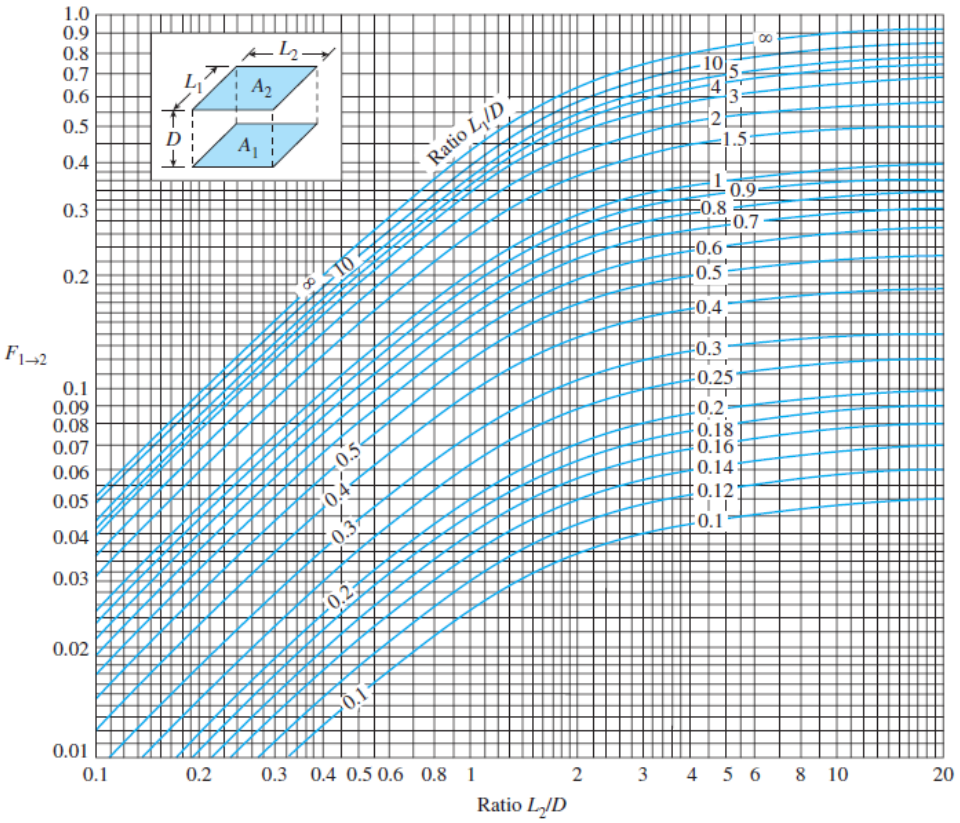


Figure 5.26 : Facteur de forme entre deux rectangles parallèles

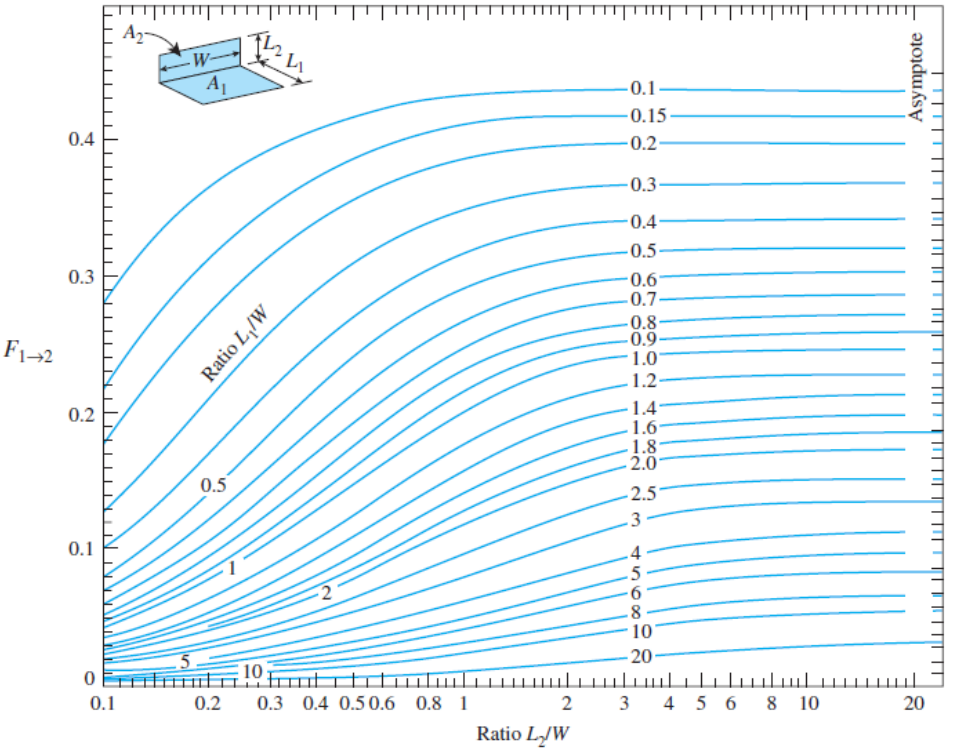


Figure 5.27: Facteur de forme entre deux rectangles perpendiculaires et joints

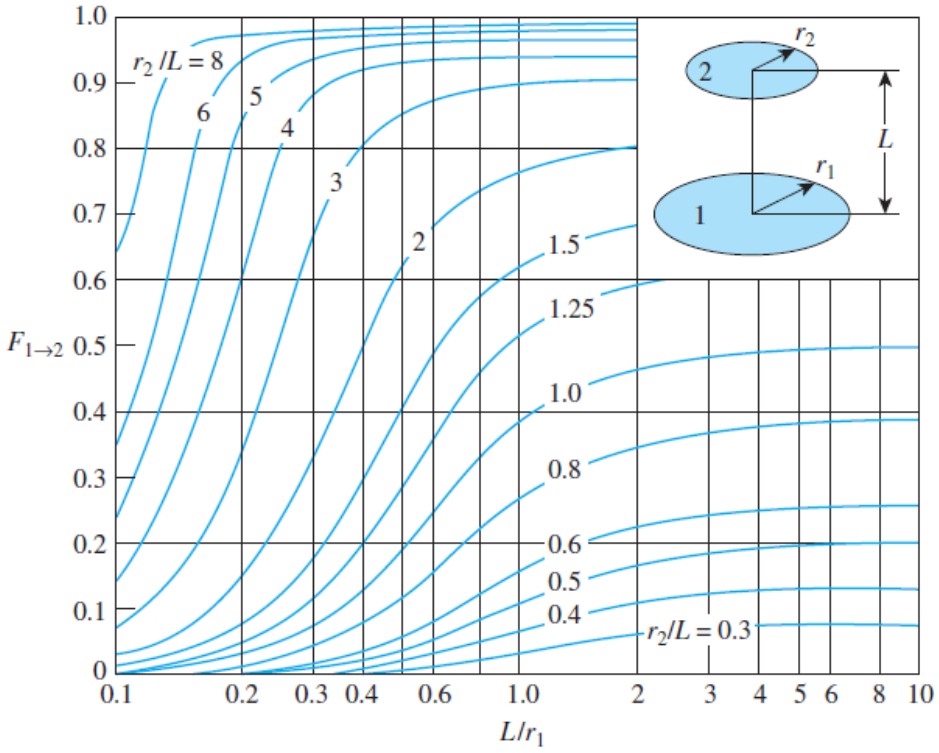


Figure 5.28: Facteur de forme entre deux disques parallèle coaxiaux

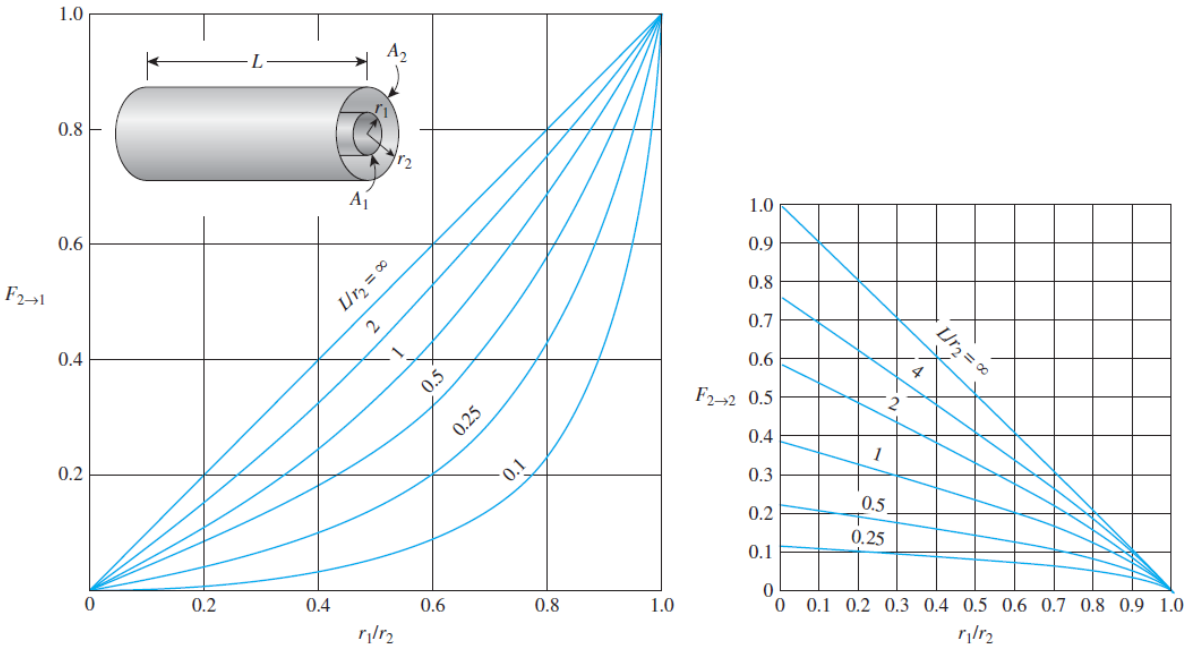


Figure 5.29: Facteur de forme entre deux cylindres concentriques de longueur finie

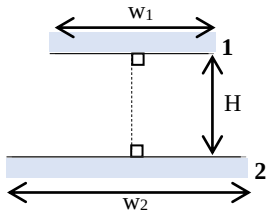
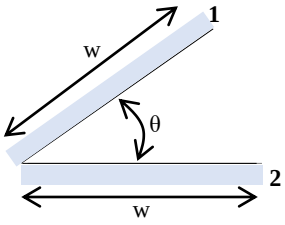
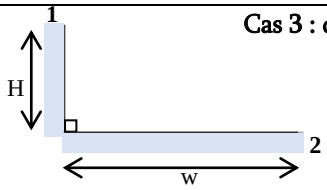
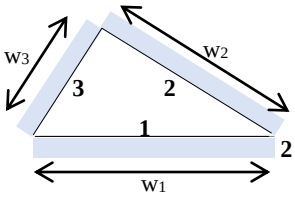
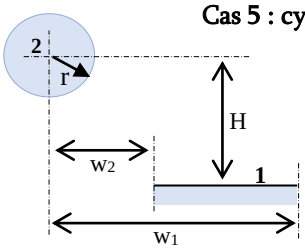
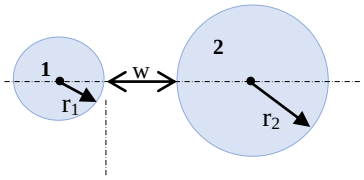
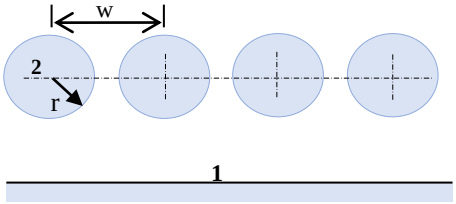
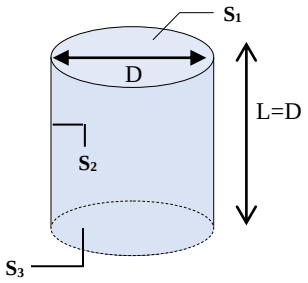
Configurations	Relations analytiques
Cas 1 : deux plaques parallèles	
	$X = w_1 / H$ et $Y = w_2 / H$ $F_{12} = \frac{\sqrt{(X+Y)^2+4} - \sqrt{(Y-X)^2+4}}{2X}$ si $w_1 = w_2 = w$, $X = Y$: $F_{12} = F_{21} = \sqrt{1+\left(\frac{H}{w}\right)^2} - \left(\frac{H}{w}\right)$
Cas 2 : deux plaques de largeur égale, inclinées et jointes	
	$F_{12} = F_{21} = 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
Cas 3 : deux plaques perpendiculaires jointes	
	$F_{12} = \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{H}{w}\right) - \sqrt{1+\left(\frac{H}{w}\right)^2}\right]$
Cas 4 : cavité à 3 surfaces	
	$F_{12} = \frac{w_1 + w_2 - w_3}{2w_1}$
Cas 5 : cylindre parallèle à une plaque infinie	
	$F_{12} = \frac{r}{w_1 - w_2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{w_1}{H}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{w_2}{H}\right)\right]$
Cas 6 : deux cylindres d'axes parallèles	
	$X = r_2 / r_1, Y = 1 + X + \frac{w}{r_1}$ $F_{12} = \frac{1}{2\pi}\left[\pi + \sqrt{Y^2-(X+1)^2} - \sqrt{Y^2-(X-1)^2} + (X-1)\cos^{-1}\left(\frac{X-1}{Y}\right) - (X+1)\cos^{-1}\left(\frac{X+1}{Y}\right)\right]$
Cas 7 : rangé de cylindres parallèles à une plaque	
	$F_{12} = 1 - \sqrt{1-\left(\frac{2r}{w}\right)^2} + \left(\frac{2r}{w}\right)\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{w^2-4r^2}{4r^2}}\right)$

Tableau 5.8 : Facteurs de forme : géométries 2D infinies

Exemple 5.12 : Déterminer les facteurs de frome F_{12} et F_{21} pour la géométrie illustrée ci-contre avec $r_2/L = 0.5$ et $L/r_1 = 2$ de la figure 5.28 $F_{13} = 0.17$
la regle de sommation nous donne $F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1$



La surface 1 est plane, $F_{11} = 0$

D'ou $F_{12} = 1 - F_{13} = 1 - 0.17 = 0.83$

La règle de réciprocité nous permet d'écrire :

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} F_{12} = \frac{\pi D^2/4}{\pi DL} \times 0.83 = 0.21$$

5.11.1.3. Échange entre deux surfaces noires

On considère deux surfaces noires isothermes « i » et « j » de forme quelconque maintenues à des températures « T_i » et « T_j ». Le flux reçu par l'une des surfaces ou l'autre est entièrement absorbé (pas de réflexion ni transmission). Par définition, le flux net échangé entre « S_i » et « S_j » représente la différence entre le flux total hémisphérique partant de « i » et arrivant sur « j » et le flux total hémisphérique partant de « j » et arrivant sur « i », on a :

$$\Phi_{ij,net} = \underbrace{\Phi_{i\to j}}_{\substack{\text{rayonnement partant de i} \\ \text{et arrivant sur j}}} - \underbrace{\Phi_{j\to i}}_{\substack{\text{rayonnement partant de j} \\ \text{et arrivant sur i}}} = M_i^0 S_i F_{ij} - M_j^0 S_j F_{ji} \qquad (5.49)$$

Compte tenu de la règle de réciprocité, l'équation 5.49 peut se mettre sous la forme :

$$\Phi_{ij,net} = S_i F_{ij}\left(M_i^0 - M_j^0\right) = S_j F_{ji}\left(M_i^0 - M_j^0\right) \qquad (5.50)$$

Utilisant la loi de Stefan-Boltzmann : $M_i^0 = \sigma T_i^4$ & $M_j^0 = \sigma T_j^4$, on en déduit alors l'expression du flux net échangé entre les deux surfaces :

$$\Phi_{ij,net} = S_i F_{ij}\sigma\left(T_i^4 - T_j^4\right) = S_j F_{ji}\sigma\left(T_i^4 - T_j^4\right) \ \text{(W)} \qquad (5.51)$$

Remarque : Suivant le signe de Φ_{net} il est possible de savoir si la surface perd de l'énergie ($\Phi_{net} > 0$) , si elle en gagne ($\Phi_{net} < 0$), on a alors $\Phi_{ij,net} = \Phi_{i\to j} - \Phi_{j\to i}$ alors $\Phi_{ij,net} = \Phi_{j\to i} - \Phi_{i\to j} = -\Phi_{ij,net}$. Lorsque les deux surfaces sont à la même température $\Phi_{net} = 0$

5.11.1.4. Échange dans une enceinte fermée

On considère une enceinte fermée constituée de « N » surfaces noires individuellement isothermes (voir figure 5.30). Pour la $i^{ème}$ surface, on peut définir « N » facteurs de forme : F_{i1}, Fi_2,F_{i3},...F_{ii},F_{ij} ,… $F_{iN} = 1$ avec : F_{ii} est le facteur de forme de la surface « S_{ii} » avec elle-même qui n'existe que si la surface est concave. Soit $\Phi_i = S_i M_i = S_i \sigma T_i^4$ le flux émis par la surface « S_i ». Faisons un bilan des échanges radiatifs sur l'une des surfaces soit « S_i », cette surface émet un flux total « Φ_i » et absorbe des flux « Φ_{ji} » (j=1, …N) provenant de toutes les autres surfaces de l'enceinte.

Le flux net relatif échangé par « S_i » avec l'ensemble s'écrit alors :

$$\Phi_{i,net} = \Phi_i - \sum_{j=1}^{N} \Phi_{j\to i} \qquad (5.52)$$

Expression que l'on peut l'écrire : $\Phi_{i,net} = \Phi_i - \sum_{j=1}^{N} F_{ji}\Phi_j = S_i M_i^0 - \sum_{j=1}^{N} S_j F_{ji} M_j^0$

En tenant compte de la règle de réciprocité $S_i F_{ij} = S_j F_{ji}$ et de la règle de sommation $\sum_{j=1}^{N} F_{ij} = 1$, on peut écrire : $\Phi_{i,net} = S_i M_i \sum_{j=1}^{N} F_{ij} - S_i \sum_{j=1}^{N} F_{ij} M_j^0 = \sum_{j=1}^{N} S_i F_{ij}\left(M_i - M_j^0\right)$

En définitif : $$\Phi_{i,net} = \sum_{j=1}^{N} S_i F_{ij} \sigma \left(T_i^4 - T_j^4 \right) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{i \to j} \quad (W) \qquad (5.53)$$

Le flux net échangé entre la surface S_i et toutes les autres surfaces est égal à la somme des flux net échangé individuellement entre « S_i » et chacune des surfaces de l'enceinte.

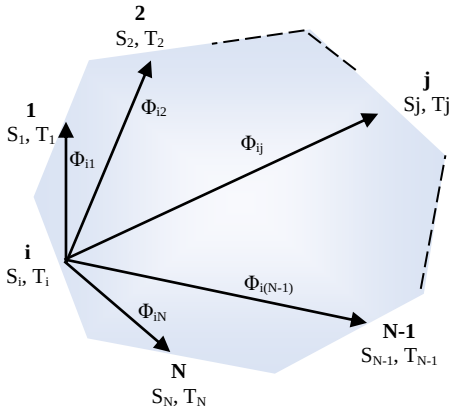


Figure 5.30 : Echange radiatif dans une enceinte noire

5.11.1.5. Analogie électrique

L'expression du flux net échangé par deux surfaces quelconques rappelle la loi d'Ohm qui donne l'expression du courant électrique traversant un réseau. Ce constat nous amène à proposer une représentation analogique des échanges, analogie qui peut se résumer par le tableau suivant :

Rayonnement	**Electricité**
Flux échangé par rayonnement $\Phi_{i,net} = \sum_{j=1}^{N} S_i F_{ij} \left(M_i^0 - M_j^0 \right)$	Intensité du courant électrique $I_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{V_i - V_j}{R_{ij}}$
Différence entre les émittances $M_i^0 - M_j^0$	Différence de potentiel V_i - V_j
Résistance par rayonnement $R_{ij} = \frac{1}{S_i F_{ij}}$	Résistance électrique R_{ij}

Tableau 5.9 : Analogie avec l'électricité

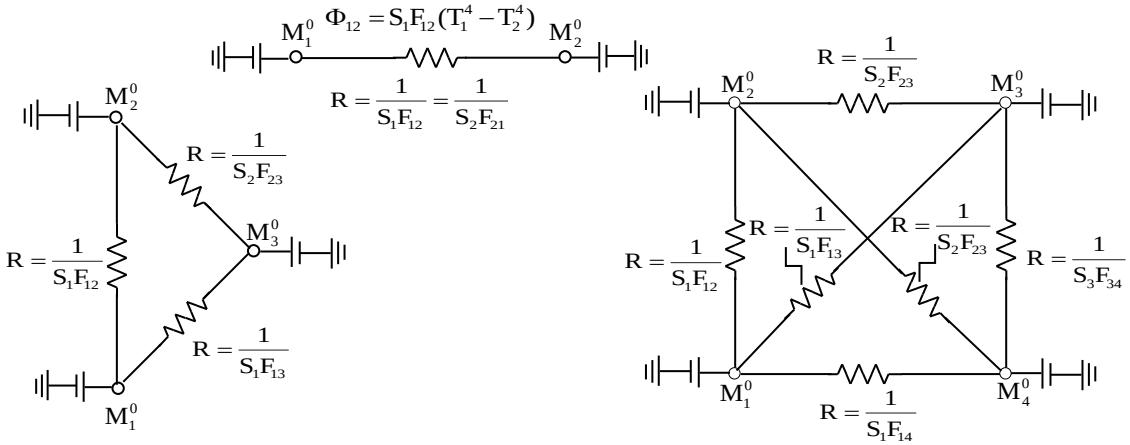


Figure 5.31 : Réseaux électriques équivalents pour une enceinte constituée respectivement de deux, trois et quatre surfaces noires.

5.11.2. Échange radiatif entre surfaces, grises et diffuses

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, l'étude du rayonnement entre des surfaces noires est relativement facile, cependant, la plupart des cas rencontrés en pratique impliquent des surfaces non noires (surfaces réfléchissantes) et donc, l'étude devient très compliquée. Pour permettre une analyse simplifiée, nous allons considérer les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Les surfaces sont considérées isothermes dont le transfert radiatif est uniforme
- Les surfaces sont également supposées être opaques ($\tau = 0$) et avoir des propriétés radiatives qui sont indépendantes de la direction (*les surfaces sont diffuses*) et indépendantes de la longueur d'onde (*les surfaces sont grises*). Ainsi on a $\varepsilon = \alpha = 1 - \rho$

5.11.2.1. Flux net perdu à la surface

Le flux net perdu la la surface « i » est la difference entre le flux emis (radiosité) et le flux absorbé (irradiation), il est exprimé par :

$$\Phi_{i,net} = \left(J_i - G_i\right) S_i \quad (W) \tag{5.54}$$

Rappelons la définition de la radiosité J : $J = M_i + \rho_i G_i$

Etant donné que la surface est opaque $(\tau = 0)$, on a : $\rho + \alpha = 1 \Rightarrow \rho = 1 - \alpha$, donc :

$$J_i = M_i + (1 - \alpha) G_i \tag{5.55}$$

Or, la loi de Kirchhoff : $\varepsilon = \alpha$ nous permet d'écrire : $J_i = \varepsilon_i M_i^0 + (1 - \varepsilon_i) G_i \quad (W/m^2)$

D'où l'on tire la valeur l'expression de l'éclairement : $G_i = \dfrac{J_i - \varepsilon_i M_i^0}{(1 - \varepsilon_i)}$ (5.56)

Introduisons cette dernière relation dans la relation 5.54, on obtient :

$$\Phi_{i,net} = \frac{\varepsilon_i S_i}{(1 - \varepsilon_i)} \left(M_i^0 - J_i\right) \quad (W) \tag{5.57}$$

Une représentation analogique peut alors être construite, l'équation (5.57) peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi_{i,net} = \frac{\left(M_i^0 - J_i\right)}{R_i} \tag{5.58}$$

Avec : $R_i = \dfrac{(1 - \varepsilon_i)}{\varepsilon_i S_i}$ représente la résistance au rayonnement de surface qui est fonction de l'émissivité et de la surface. Deux remarques peuvent être constatées :

- Pour une surface noire $\varepsilon_i = 1$, la résistance s'annule $\Rightarrow M_i^0 = J_i$
- Pour une surface grande, la résistance s'annule aussi, par conséquent on la considère comme surface noire.

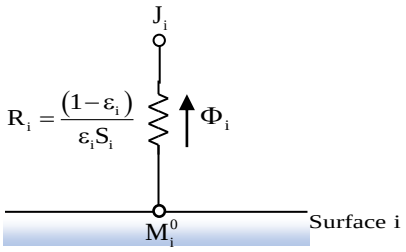


Figure 5.32 : Schéma électrique équivalent : Résistance de surface

5.11.2.2. Echange radiatif entre deux surfaces

Considérons une cavité formée de deux surfaces opaques, diffuses, et grises comme le montre la figure 5.33. La surface S_i émis un flux dans tout l'espace S_iJ_i. Seule la fraction $F_{ij}S_iJ_i$ atteint la surface S_j. Réciproquement de la surface S_j il arrive sur S_i la fraction $F_{ji}S_jJ_j$.

Le flux net échangé a pour expression :

$$\Phi_{ij} = S_iF_{ij}J_i - S_jF_{ji}J_j \quad (W) \tag{5.59}$$

En tenant compte de la règle de réciprocité $S_iF_{ij} = S_jF_{ji}$, on obtient :

$$\Phi_{ij} = \frac{\left(J_i - J_j\right)}{\dfrac{1}{S_iF_{ij}}} = \frac{\left(J_i - J_j\right)}{R_{ij}} \quad (W) \tag{5.60}$$

Relation analogue à la loi d'Ohm dont « Φ_{ij} » correspond au courant électrique, J_i-J_j correspond à la différence de potentiel « ΔV » et « R_{ij} » à la résistance électrique. La résistance « R_{ij} » est appelée résistance au rayonnement spatiale à la différence des résistances à la surface « R_i » et « R_j ».

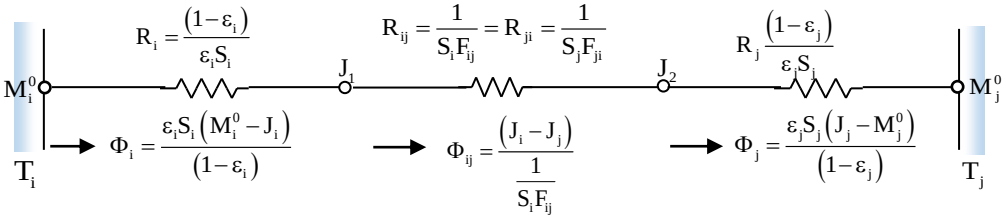


Figure 5.33 : Analogie électrique entre deux surfaces opaques, diffuses, et grises

Pour une enceinte à « N » surfaces, et comme le montre la figure 5.34, le principe de conservation de l'énergie nécessite que le flux de chaleur net de la surface « i » soit égal à la somme des flux de chaleur nets de la surface « i » à chacune des « N » surfaces de l'enceinte (voir figure 5.34) :

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{i\to j} = \sum_{j=1}^{N} S_iF_{ij}\left(J_i - J_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(J_i - J_j\right)}{R_{ij}} \tag{5.61}$$

En combinant cette dernière équation avec l'équation 5.58, on obtient

$$\frac{\left(M_i^0 - J_j\right)}{R_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(J_i - J_j\right)}{R_{ij}} \tag{5.62}$$

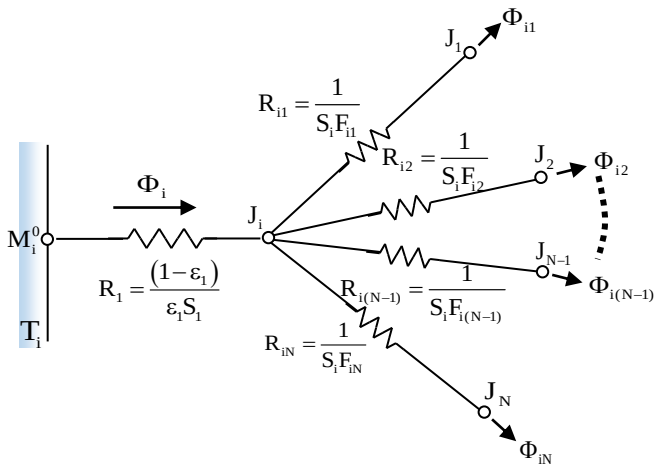


Figure 5.34 : Analogie électrique du transfert de chaleur par rayonnement entre la surface « i » et les « N » surfaces de l'enceinte

5.11.2.3. Méthodes de résolution

La résolution des problèmes de rayonnement au sein des enceintes consiste à connaitre soit la température ou le flux pour chacune des surfaces. En général, deux techniques sont utilisées pour la résolution : la ***méthode directe*** (dite aussi méthode matricielle) et la méthode utilisant ***l'analogie électrique***. La résolution directe consiste à écrire l'équation 5.62 pour chaque surface à laquelle « T_i » est connue, et l'équation 5.61 pour chaque surface à laquelle le flux « Φ_i » est connu. Cela revient donc à résoudre un système de « N » équations algébriques linéaires pour J_1, J_2, . . ., J_N. Ensuite l'équation 5.61 peut alors être utilisée pour déterminer le flux radiatif net « Φ_i » tandis que les températures « T_i » peuvent être évaluées à partir de l'équation 5.62. Cette technique est plus adaptée quand le nombre de surfaces est grand.

Quand le nombre de surfaces est faible (inférieure à 3 ou 4 surfaces), la méthode utilisée est celle de l'analogie électrique. Nous en avons vu l'utilité de cette méthode pour la résolution des problèmes de conduction.

5.11.2.4. Echange radiatif entre deux surfaces formant une enceinte

Considérons une cavité constituée de deux surfaces, comme illustré sur la figure 5.35, et essayons de déterminer le flux net échangé entre les deux surfaces avec la méthode du réseau électrique. Les surfaces « S_1 » et « S_2 » ont des émissivités « ε_1 » et « ε_2 » et sont maintenues à des températures uniformes « T_1 » et « T_2 », respectivement. Ainsi nous pouvons écrire :

$$\Phi_{12} = \Phi_1 = -\Phi_2$$

Comme en conduction, et à partir du schéma électrique équivalent, on peut utiliser la loi de conservation du flux, ainsi on obtient :

$$\Phi_{12} = \frac{\left(M_1^0 - M_2^0\right)}{R_1 + R_{12} + R_2} = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{(1-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 F_{12}} + \frac{(1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 S_2}} \tag{5.63}$$

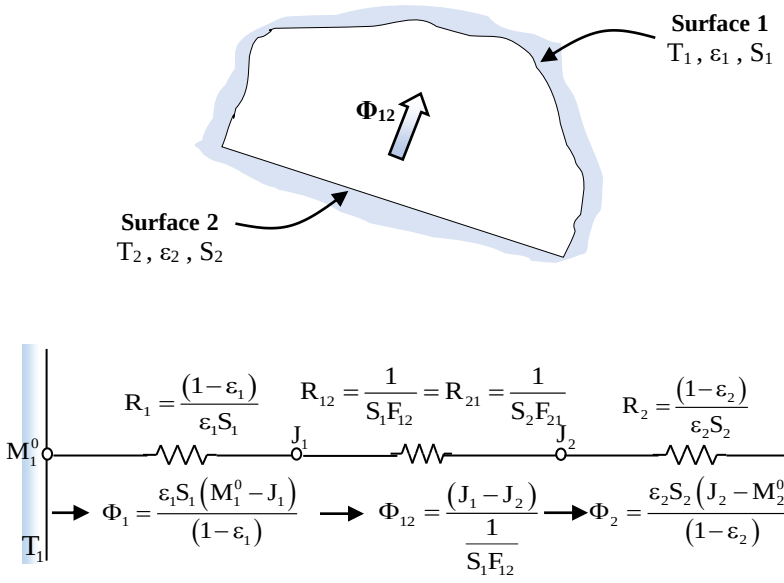


Figure 5.35 : Schéma et réseau électrique associé

L'équation 5.63 est la forme la plus générale qui couvre l'échange de chaleur par rayonnement entre deux surfaces quelconques, qu'elles soient noires ou grises. Des cas particuliers de cette équation présentent un intérêt particulier et important en pratique. Ils sont résumés dans le tableau suivant :

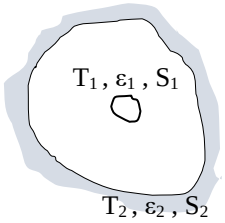
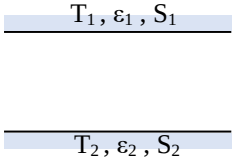
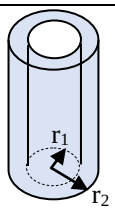
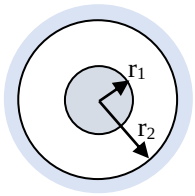
Petit objet convexe dans une grande cavité $\frac{S_1}{S_2}=0,\ F_{12}=1 \qquad \Phi_{12}=S_1\sigma\varepsilon_1\left(T_1^4-T_2^4\right)$	
Grands plans parallèles infinis $S_1=S_2=S,\ F_{12}=1 \qquad \Phi_{12}=\frac{S\sigma\left(T_1^4-T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}-1}$	
Deux cylindres concentriques longs infinis $\frac{S_1}{S_2}=\frac{r_1}{r_2},\ F_{12}=1 \qquad \Phi_{12}=\frac{S_1\sigma\left(T_1^4-T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$	
Deux sphères concentriques $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2,\ F_{12}=1 \qquad \Phi_{12}=\frac{S_1\sigma\left(T_1^4-T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$	

Tableau 5.10 : Relations particulières de l'équation 5.63

Exemple 5.13: on considère deux sphères concentriques maintenues à des températures uniformes T_1 = 900 K et T_2 = 600 K et ont des émissivités ε_1 = 0.3 et ε_2 = 0.8, respectivement. Sachant que les diamètres intérieur et extérieur sont respectivement égaux à 20 cm et 25 cm, déterminer le flux radiatif échangé.

Solution :

Le flux radiatif transféré de la sphères 1 à la sphère 2 est facilement déterminé comme suit :

$$\Phi_{12}=\frac{S_1\sigma\left(T_1^4-T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}=\frac{4\pi\times\left(20\times10^{-2}\right)^2\times5.67\times10^{-8}\left(900^4-600^4\right)}{\frac{1}{0.3}+\frac{1-0.8}{0.8}\left(\frac{20}{25}\right)^2}=4293.298\ \text{W}$$

5.11.2.5. Echange radiatif entre plusieurs surfaces formant une enceinte

Considérant maintenant une cavité composée de trois surfaces « S_1 », « S_2 » et « S_3 ». Les surfaces sont maintenues aux températures « T_1 », « T_2 » et « T_3 » et ont les émissivités « ε_1 », « ε_2 » et « ε_3 » respectivement. Il est donc facile de visualiser de tels échanges à l'aide du schéma électrique équivalent (voir figure 5.36). Les trois potentiels « M_1^0 », « M_2^0 » et « M_3^0 » sont considérés connus, car les températures de surface sont spécifiées. En écrivant l'équation 5.62 pour chacune des surfaces, on obtient le système d'équations suivant :

$$\frac{M_1^0 - J_1}{R_1} + \frac{J_2 - J_1}{R_{12}} + \frac{J_3 - J_1}{R_{13}} = 0$$

$$\frac{J_1 - J_2}{R_{12}} + \frac{M_2^0 - J_2}{R_2} + \frac{J_3 - J_2}{R_{23}} = 0$$

$$\frac{J_1 - J_3}{R_{13}} + \frac{J_2 - J_3}{R_{23}} + \frac{M_3^0 - J_3}{R_3} = 0$$

Une fois, les radiosités J_1, J_2 et J_3 sont obtenues par la résolution du système d'équations algebriques linéaires, les flux radiatifs à chaque surface peut être évalué à partir de l'équation 5.61.

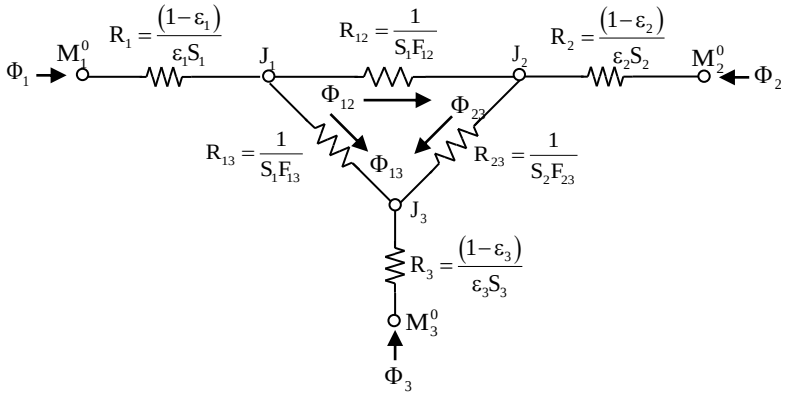


Figure 5.36 : Schéma électrique équivalent

Un cas particulier ou l'un des surface « S_i » devient non absorbante, dite aussi reradiante ou adiabatique. Ceci revient donc à dire que sur la surface « i », le flux $\Phi_i = 0$ et $R_i = 0$, par consequent « M_i^0 » devient égal à « J_i » (voir figure 5.37). D'où, pour la surface 3 : $\Phi_3 = 0,\ R_3 = 0 \rightarrow M_3^0 = J_3$

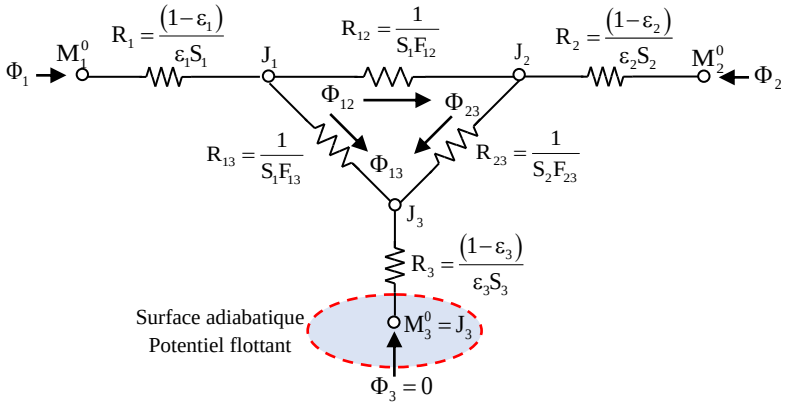


Figure 5.37 : Schéma électrique équivalent : surface adiabatique

5.11.2.6. Ecran radiatif

Dans certaines situations de transfert de chaleur par rayonnement, il est très désirable d'atténuer l'effet du rayonnement entre deux surfaces. A cet effet, on installe entre les deux surfaces, un écran mince, d'un matériau ayant une grande capacité de réflexion et un faible coefficient d'émissivité.

Etant donné que le flux radiatif échangé entre deux plaques parallèles infinies d'émissivités « ε_1 » et « ε_2 » maintenues à des températures uniformes « T_1 » et « T_2 » peut se mettre sous la forme :

$$\Phi_{12,\text{sans écran}} = \frac{S\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \tag{5.64}$$

Comme l'illustre la figure 5.38, la présence de l'écran radiatif, fait apparaitre des résistances supplémentaires. On note l'émissivité associée au côté gauche de l'écran « $\varepsilon_{3,1}$ » qui peut se différer de celle associée au côté opposé « $\varepsilon_{3,2}$ ». Les résistances sont connectées en série, et le flux radiatif s'écrit alors :

$$\Phi_{12,\text{un écran}} = \frac{M_1^0 - M_2^0}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 F_{13}} + \frac{1-\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{13} S_3} + \frac{1-\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{32} S_3} + \frac{1}{S_3 F_{32}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} \tag{5.65}$$

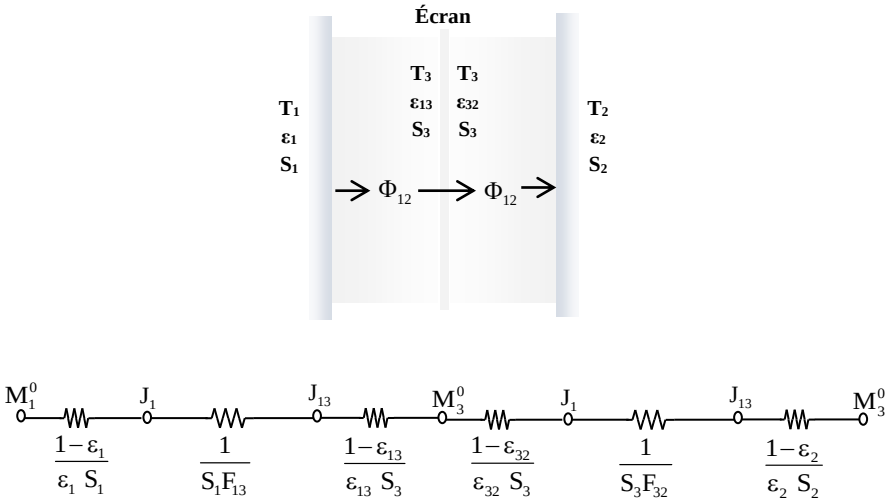


Figure 5.38 : Schéma électrique équivalent pour un écran radiatif entre deux surfaces infinies

Etant donné que dans ce présent cas nous avons : $S_1 = S_2 = S_3 = S$, et $F_{13} = F_{32}=1$, la relation 5.65 devient :

$$\Phi_{12,\text{un écran}} = \frac{\sigma S\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_{13}} + \frac{1}{\varepsilon_{32}} - 1\right)}$$

Si $\varepsilon = \varepsilon_{3,1} = \varepsilon_{3,2}$ cette dernière relation devient :

$$\Phi_{12,\text{un écran}} = \frac{S\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + \left(\frac{2}{\varepsilon_3} - 1\right)} \tag{5.66}$$

On constate que cette formule diffère de celle en absence d'écran par le facteur $\left(\frac{2}{\varepsilon_3} - 1\right)$ au dénominateur. Dans d'autres situations on augmente le nombre d'écran afin de réduire considérablement le flux radiatif entre les surfaces. Ceci revient à ajouter l'expression $\left(\frac{2}{\varepsilon_3} - 1\right)$ autant de fois que le nombre des écrans installés. Ainsi, le flux radiatif transmis entre deux surfaces séparées par « N » écrans est donné par l'expression suivante :

$$\Phi_{12,\text{N écrans}} = \frac{S\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + N\left(\frac{2}{\varepsilon_3} - 1\right)} \tag{5.67}$$

Si les émissivités de toutes les surfaces sont égales, cette dernière équation se réduit à :

$$\Phi_{12,\text{N écrans}} = \frac{S\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{(N+1)\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = \frac{1}{(N+1)}\Phi_{12,\text{sans écrans}} \tag{5.68}$$

Exemple 5.14 : On considère deux grandes plaques parallèles avec les données suivantes : $T_1 = 727$ °C, $T_2 = 327$ °C, $\varepsilon_1 = 0.5$ et $\varepsilon_2 = 0.8$. Un écran radiatif ayant les émissivités $\varepsilon_{31} = 0.1$ et $\varepsilon_{32} = 0.05$ est placé entre les plaques. Calculer le flux radiatif par mètre carré de surface échangé entre les deux plaques pour les deux cas suivant : (a) avec écran, (b) sans écran. Commenter le résultat ?

(a). L'échange thermique de rayonnement net sans écran anti-rayonnement peut être exprimé comme suit :

$$\frac{\Phi_{12,\text{sans écran}}}{S} = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = \frac{5.67\times10^{-8}\left(1000^4 - 600^4\right)}{\left(\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.8} - 1\right)} = 21934.08 \text{ W/m}^2$$

(b). Lorsqu'un écran anti-rayonnement est placé entre les plaques parallèles, le transfert de chaleur par rayonnement peut être calculé comme suit :

$$\frac{\Phi_{12,\text{un écran}}}{S} = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_{13}} + \frac{1}{\varepsilon_{32}} - 1\right)}$$

$$= \frac{5.67\times10^{-8}\left(1000^4 - 600^4\right)}{\left(\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.8} - 1\right) + \left(\frac{1}{0.1} + \frac{1}{0.05} - 1\right)} = 1579.25 \text{ W/m}^2$$

Conclusion : En comparant les flux nets échangés avec et sans écran radiatif, on constate que la présence d'un écran anti-rayonnement réduit le taux de transfert de chaleur :

$$\frac{21934.08 - 1579.25}{1579.25} = 0.928 \approx 93\%$$

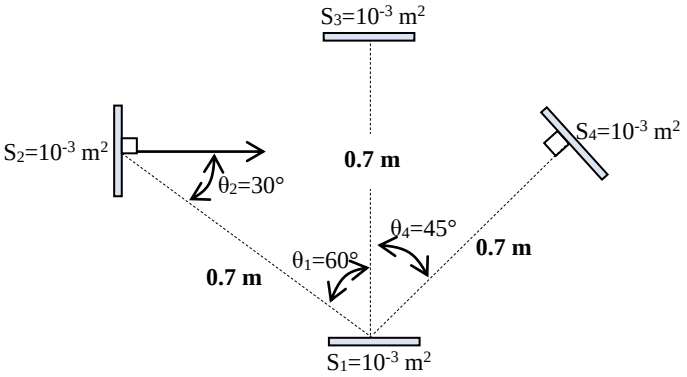
5.12. Exercices sur le chapitre

Exercice 01 : Une petite surface diffuse d'aire $S_1 = 10^{-3}$ m^2 émet de façon isotrope (voir figure ci-dessous). On mesure la luminance totale dans la direction normale à la surface : $L_n = 4500$ W.m^{-2}.sr^{-1}. Le flux rayonné est intercepté par 4 autres surfaces de même aire « A ». Les surfaces sont orientées comme l'illustre la figure ci-dessous (r = 0.7 m).

1. Quelle est la luminance totale dans les 4 directions d'émission associées aux 4 récepteurs.

2. Quelles sont les valeurs des angles solides sous lesquels les 4 surfaces réceptrices sont vues depuis l'émetteur.

3. Quelles sont les valeurs des flux interceptés par les 4 surfaces.



Solution : Puisque le rayonnement est isotrope, alors son intensité ne dépend pas de la direction d'émission. La luminance est donc : $L = L_n = 4500\,\text{W/m}^2\text{.sr}$

- L'angle solide entre la surface i (2, 3 et 4) et la surface 1 est donné par la relation $d\Omega_{i\to 1} = dA\cos\theta_i / r^2$. Dans cette relation, « θ_i » désigne l'angle que fait la surface « i » avec la direction du rayonnement incident provenant de « 1 ». Donc

$$\Omega_{2\to 1} = \frac{A\cos\theta_2}{r_0^2} = \frac{10^{-3}\times\cos 30}{0.7^2} = 1.767\times10^{-3}\,\text{sr}$$

$$\Omega_{3\to 1} = \frac{A\cos\theta_3}{r_0^2} = \frac{10^{-3}\times\cos 0}{0.7^2} = 2.041\times10^{-3}\,\text{sr}$$

$$\Omega_{4\to 1} = \frac{A\cos\theta_4}{r_0^2} = \frac{10^{-3}\times\cos 45}{0.7^2} = 1.443\times10^{-3}\,\text{sr}$$

- Pour calculer le flux intercepté par la surface « i » (2, 3 et 4) en venant de 1 on utilise la relation : $\Phi_{1\to j} = LA\cos\theta_1\Phi_{j\to 1}$. Dans cette relation, « θ_i » désigne l'angle que fait la direction du rayonnement issu de 1 et incident aux surfaces *i* avec la surface 1. On trouve alors :

$$\Phi_{1\to 2} = LA\cos\theta_2\Phi_{2\to 1} = 4500\times10^{-3}\cos 60\times1.767\times10^{-3} = 3.98\times10^{-3}\,\text{W}$$

$$\Phi_{1\to 3} = LA\cos\theta_3\Phi_{3\to 1} = 4500\times10^{-3}\cos 0\times2.041\times10^{-3} = 9.19\times10^{-3}\,\text{W}$$

$$\Phi_{1\to 4} = LA\cos\theta_4\Phi_{4\to 1} = 4500\times10^{-3}\cos 45\times1.443\times10^{-3} = 4.59\times10^{-3}\,\text{W}$$

Exercice 02 : Une surface noire rayonnant dans le vide est maintenue à une température égale à 1000 °C. A une longueur d'onde de 6 μm, quelle est la luminance émise, l'émittance spectrale directionnelle du corps noir à un angle de 60° par rapport à la normale de la surface, et l'émittance spectrale hémisphérique.

$$L^0_{6\mu m} = \frac{\frac{C_1}{\pi}\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1} = \frac{1.1194\times10^8\times(6)^{-5}}{\exp\left(\frac{1.439\times10^4}{6\times1273}\right)-1} = 2745.9\ W/m^2.sr.\mu m$$

L'émittance spectrale directionnelle : $M^0_\lambda(6,60°) = L^0_\lambda \cos\theta = 2745.9\cos 60 = 1372.95\ W/m^2\mu m$

L'émittance spectrale hémisphérique est alors : $M^0_\lambda = \pi L^0_\lambda = 8622.126\ W/m^2\mu m$

Exercice 03 : On considère que le soleil rayonne comme un corps noir à 5800 K.

1. Déterminer la fraction de l'énergie rayonnée du soleil située dans les plages suivantes :
   - Domaine visible ($0.4 \le \lambda \le 0.76$ μm)
   - Ultra-violet ($0.01 \le \lambda \le 0.4$ μm)
   - Solaire $0 \le \lambda \le 3$ μm
   - Infrarouge $0.76 \le \lambda \le 100$ μm
2. À quelle longueur d'onde et à quelle fréquence l'énergie maximale est-elle émise ? Quelle est la valeur maximale de l'émittance spectrale hémisphérique ?

Solution :

1. Calcul de la fraction d'énergie rayonnée dans les différents domaines :

- ***Visible*** : utilisant le tableau 5.4 : $\begin{cases}\lambda_1 T = 0.4\times5800 = 2320 \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0\to2320} = 0.124534\\ \lambda_2 T = 0.76\times5800 = 4408 \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0\to4408} = 0.549969\end{cases}$

Ainsi, dans la plage visible, la fraction d'énergie radiante est :

$$F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T} = 0.549969 - 0.124534 = 0.425 = 42.5\ \%$$

- ***Ultra-violet*** : utilisant le tableau 5.4 : $\begin{cases}\lambda_1 T = 0.01\times5800 = 58 \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0\to58} = 0\\ \lambda_2 T = 0.4\times5800 = 2320 \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0\to2320} = 0.124534\end{cases}$

Ainsi, dans la plage visible, la fraction d'énergie radiante est :

$$F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T} = 0.124534 - 0 = 0.124534 \approx 12.4534\ \%$$

- ***Solaire*** : utilisant le tableau 5.4 : $\begin{cases}\lambda_1 T = 0\times5800 = 0 \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0\to0} = 0\\ \lambda_2 T = 3\times5800 = 17400 \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0\to17400} = 0.978685\end{cases}$

Ainsi, la fraction d'énergie radiante est :

$$F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T} = 0.978685 - 0 = 0.978685 \approx 97.8685\ \%$$

- ***Infrarouge*** : utilisant le tableau 5.4 : $\begin{cases}\lambda_1 T = 0.76\times5800 = 4408 \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0\to4408} = 0.549969\\ \lambda_2 T = 100\times5800 = 580\,000 \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0\to580000} = 1\end{cases}$

Ainsi, dans la plage visible, la fraction d'énergie radiante est :

$$F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T} = 1 - 0.549969 = 0.45 \approx 45\%$$

2. La longueur d'onde correspondant à l'émittance maximale est calculée par la première loi de Wien : $\lambda_{max} T = 2898 \Rightarrow \lambda_{max} = \dfrac{2898}{T} = \dfrac{2898}{5800} = 0.5\,\mu m$

La fréquence correspondante est donc : $f = \dfrac{c_o}{\lambda} = \dfrac{2.9979\times10^{8}}{0.5\times10^{-6}} \approx 6\times10^{14}$ Hz

L'émittance spectrale hémisphérique peut se calculer en utilisant la deuxième loi de Wien

$$M^0_{\lambda_{max}} = B\,T^5 = 1.287\times10^{-5}T^5 = 1.287\times10^{-5}(5800)^5 = 8.447\times10^{13}\ W/m^3$$

Exercice 04 : Le rayonnement solaire a approximativement la même distribution spectrale qu'un corps noir à une température de 5800 K. Utiliser les données suivantes pour déterminer la quantité radiative solaire, émise dans la gamme du visible (0.4 μm à 0.76 μm) :

$$0 \le \lambda \le 0.40 \qquad F_{0\to 2320} = 0.124534$$
$$0 \le \lambda \le 0.76 \qquad F_{0\to 4408} = 0.549969$$

Solution : Le rayonnement total émis par le soleil dans le spectre visible est calculé par

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M^0_\lambda d\lambda = \sigma T^4 \times \left(F_{0\text{-}\lambda_2} - F_{0\text{-}\lambda_1}\right) = 5.67\times10^{-8}\times(5800)^4 \times (0.549969 - 0.124534)$$
$$= 2.729\times10^{7} \quad W/m^2$$

Exercice 05 : Une surface métallique dont la température est de 2 000 K. L'émissivité spectrale hémisphérique est illustrée sur la figure ci-contre.

1. Déterminer l'émissivité hémisphérique totale ainsi que l'émittance hémisphérique totale à cette température.
2. Pour des températures comprises 500 < T < 3000 K, tracez la courbe de variation de l'émissivité en fonction de la température. Commenter le résultat

Solution :

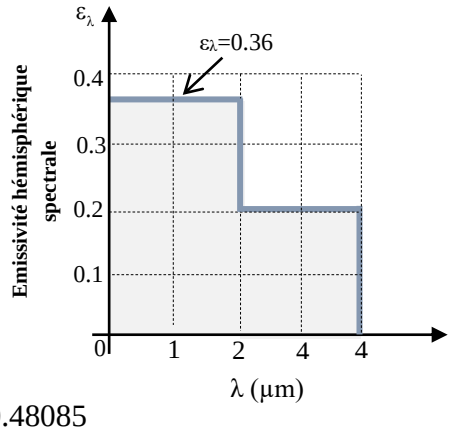
1. D'après la définition de l'émissivité totale hémisphérique, on a :

$$\varepsilon(T) = \varepsilon_1 \int_0^{2\mu m} \frac{M^0_\lambda d\lambda}{\sigma T^4} + \varepsilon_2 \int_{2\mu m}^{4\mu m} \frac{M^0_\lambda d\lambda}{\sigma T^4}$$

Or : $\varepsilon(T) = \varepsilon_1 \dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\int_{\lambda T=0}^{4000} \frac{M^0_\lambda}{T^5} d(\lambda T) + \varepsilon_2 \frac{1}{\sigma}\int_{\lambda T=4000}^{8000} \frac{M^0_\lambda}{T^5} d(\lambda T)$

Cette relation est équivalente à :

$$\varepsilon(T) = \varepsilon_1 F_{0\to\lambda_1 T} + \varepsilon_2\left(F_{0\to\lambda_2 T} - F_{0\to\lambda_1 T}\right)$$



En utilisant les valeurs du tableau 5.4 :

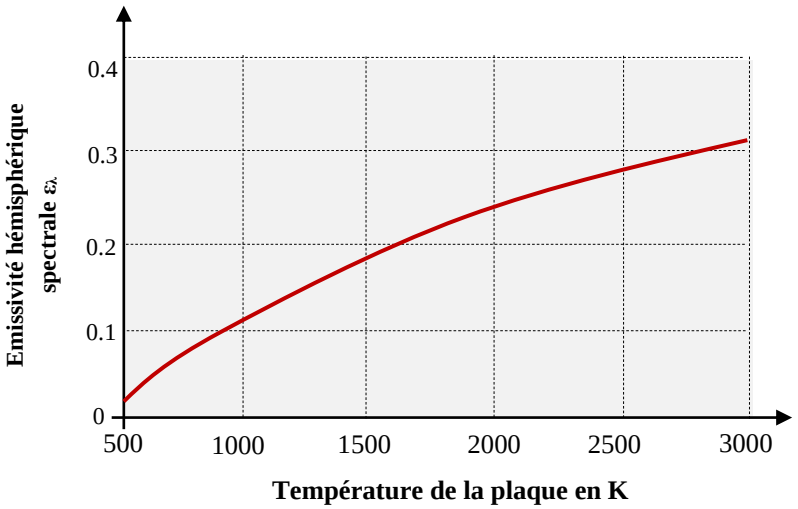
$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\,\mu m \;\; T = 2000\,K \;\; \lambda_1 T = 4000\,\mu mK \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0\to\lambda_1 T} = 0.48085 \\ \lambda_2 = 4\,\mu m \;\; T = 2000\,K \;\; \lambda_2 T = 8000\,\mu mK \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0\to\lambda_2 T} = 0.85624 \end{cases}$$

On trouve donc : $\varepsilon(T) = 0.36\times0.48085 + 0.2(0.85624 - 0.48085) = 0.248184$

On en déduit l'émittance totale :

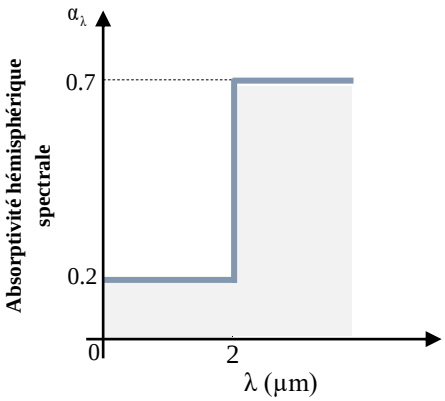
$$M = \varepsilon M^0 = \varepsilon\sigma T^4 = 0.248184\times5.67\times10^{-8}(2000)^4 = 2.251\times10^{5}\ W/m^2$$

2. En reprenant les calculs de l'émissivité pour des différentes températures, les résultats sont tracés dans la courbe suivante :



On peut constater que : à $T \approx 500\,K$ la majeure partie du rayonnement est émise dans l'infrarouge lointain ($\lambda > 4\,\mu m$) dans le cas où $\varepsilon \approx 0$. On remarque aussi qu'avec l'augmentation de la température, l'émission est décalée vers les longueurs d'onde inférieures, ce qui conduit à l'augmentation de l'émissivité (comme $T \to \infty, \varepsilon \to \infty$).

Exercice 06 : La variation de l'absorptivité spectrale d'une surface opaque est indiquée sur la figure ci- contre. Déterminer l'absorptivité et la réflectivité moyennes de la surface pour le rayonnement provenant d'une source à T = 2500 K. Déterminer également l'émissivité moyenne de cette surface à 3000 K.



Solution : L'absoprtivité moyenne peut se calculer par :

$$\alpha(T) = \alpha_1 F_{0\to\lambda_1 T} + \alpha_2 \left(F_{0\to\infty} - F_{0\to\lambda_1 T}\right)$$

En utilisant les valeurs tabulées du tableau 5.4, on trouve :

$$\lambda_1 = 2\,\mu m \quad T = 2500 \quad \lambda_1 T = 5000\,\mu mK \to F_{0\to\lambda_1 T} = 0.63371$$

Cela donne : $\alpha(T) = 0.2 \times 0.63371 + 0.7(1 - 0.63371) = 0.383145$

La surface est opaque $\alpha + \rho = 1$, alors la réflectivité est : $\rho = 1 - \alpha = 0.616855$

Utilisant la loi de Kirchhoff $\varepsilon = \alpha$, l'émissivité hémisphérique totale à la température de 3000 K est calculée comme suit : $\varepsilon(T) = \varepsilon_1 F_{0\to\lambda_1 T} + \varepsilon_2 \left(F_{0\to\infty} - F_{0\to\lambda_1 T}\right)$ dans laquelle $\varepsilon_1 = \alpha_1$ et $\varepsilon_2 = \alpha_2$

Le tableau 5.4 nous donne donc : $\lambda_1 = 2\,\mu m \quad T = 3000 \quad \lambda_1 T = 6000\,\mu mK \to F_{0\to\lambda_1 T} = 0.73777$

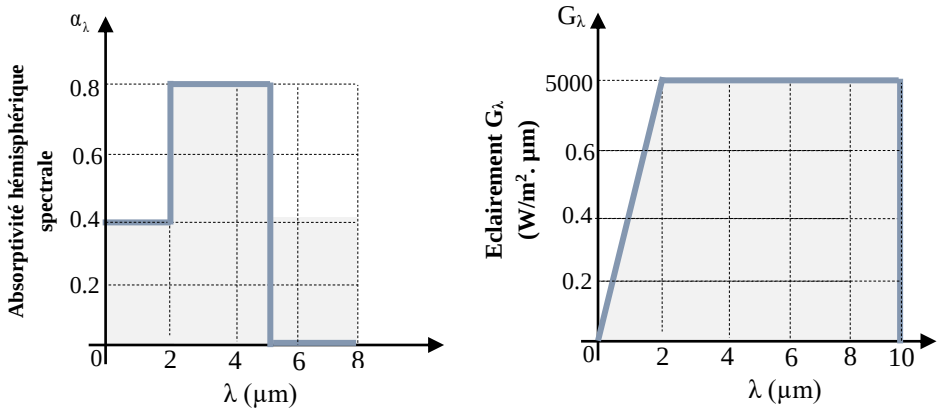
Par conséquent : $\varepsilon(T) = 0.2 \times 0.73777 + 0.7(1 - 0.73777) = 0.331115$

Exercice 07 : Considérons une surface opaque et diffuse caractérisée par son absorptivité hémisphérique spectrale et son éclairement (voir figure ci-dessous).

1. Calculer l'absorptivité totale hémisphérique de la surface.
2. Sachant que la température initiale de la surface est de 1400 K, quelle est alors l'émittance hémisphérique totale à cette température.
3. La température va-t-elle croître ou décroître
4. Calculer la radiosité à la température initiale

Solution

1. L'absorptivité totale hémisphérique de la surface est le rapport entre l'éclairement total hémisphérique absorbé et l'éclairement total hémisphérique incident :



$$\alpha = \frac{G_{abs}}{G} = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^{\infty} G_\lambda d\lambda}$$

En tenant compte des variations de α_λ et de G_λ, cela revient à calculer :

$$\alpha = \frac{0.4\int_0^{2} G_\lambda d\lambda + 0.8\int_2^{5} G_\lambda d\lambda + 0\int_5^{\infty} G_\lambda d\lambda}{\int_0^{2} G_\lambda d\lambda + \int_2^{10} G_\lambda d\lambda}$$

Chaque intégrale représente l'aire sous la courbe, la première intégrale est un trapèze d'où son $\text{aire} = \frac{1}{2} \times (\text{hauteur} \times \text{largeur})$, par conséquent on obtient :

$$G_{abs} = 0.4 \times \frac{1}{2}(5000 \times 2) + 0.8 \times 5000(5-2) + 0 = 14000 \text{ W/m}^2$$

Et : $G = \frac{1}{2}(2 \times 5000) + (10-2) \times 5000 = 45000 \text{ W/m}^2$

Ce qui donne : $\alpha = 14000 / 45000 = 0.311$

2. L'émissivité hémisphérique totale est définie par : $\varepsilon(T) = \varepsilon_1 \int_0^{2\mu m} \frac{M_\lambda^0 d\lambda}{\sigma T^4} + \varepsilon_2 \int_{2\mu m}^{5\mu m} \frac{M_\lambda^0 d\lambda}{\sigma T^4}$

Or : $\varepsilon(T) = \varepsilon_1 \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda T=0}^{2800} \frac{M_\lambda^0}{T^5} d(\lambda T) + \varepsilon_2 \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda T=2800}^{7000} \frac{M_\lambda^0}{T^5} d(\lambda T)$

Cette relation est équivalente à : $\varepsilon(T) = \varepsilon_1 F_{0 \to \lambda_1 T} + \varepsilon_2 \left(F_{0 \to \lambda_2 T} - F_{0 \to \lambda_1 T} \right)$

A partir du tableau 5.4 (voir annexe), on trouve :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\mu m \;\; T = 1400\,K \;\; \lambda_1 T = 2800\,\mu mK \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0 \to \lambda_1 T} = 0.22788 \\ \lambda_2 = 5\mu m \;\; T = 1400\,K \;\; \lambda_2 T = 7000\,\mu mK \overset{\text{Tableau}}{\Rightarrow} F_{0 \to \lambda_2 T} = 0.80806 \end{cases}$$

On trouve donc : $\varepsilon(T) = 0.4 \times 0.22788 + 0.8(0.80806 - 0.22788) = 0.555296$

On en déduit l'émittance totale : $M = \varepsilon M^0 = \varepsilon \sigma T^4 = 0.555296 \times 5.67 \times 10^{-8} (1400)^4 = 1.209 \times 10^5 \text{ W/m}^2$

3. A partir du bilan énergétique à la surface, le flux thermique net vers la surface est :

$$\Phi_{net} = \alpha G - M = \left(45000 - 1.209 \times 10^5\right) = -7.59 \times 10^4 \text{ W/m}^2$$

Comme le flux net est négatif, la température de surface va donc décroître.

On constate que la surface n'est pas grise $\alpha \neq \varepsilon$.

4. La radiosité quand la température de la surface est de 1400 K est calculer comme suit :

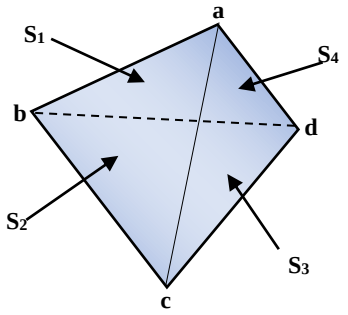
$$J = M + \rho G = M + (1-\alpha)G$$
$$= 1.209\times10^5 + (1-0.311)\times 45000 = 1.519\times10^5 \ W/m^2$$

Exercice 08 : Soit à calculer les facteurs de forme F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14} d'un tétraèdre régulier (voir figures ci-dessous) :

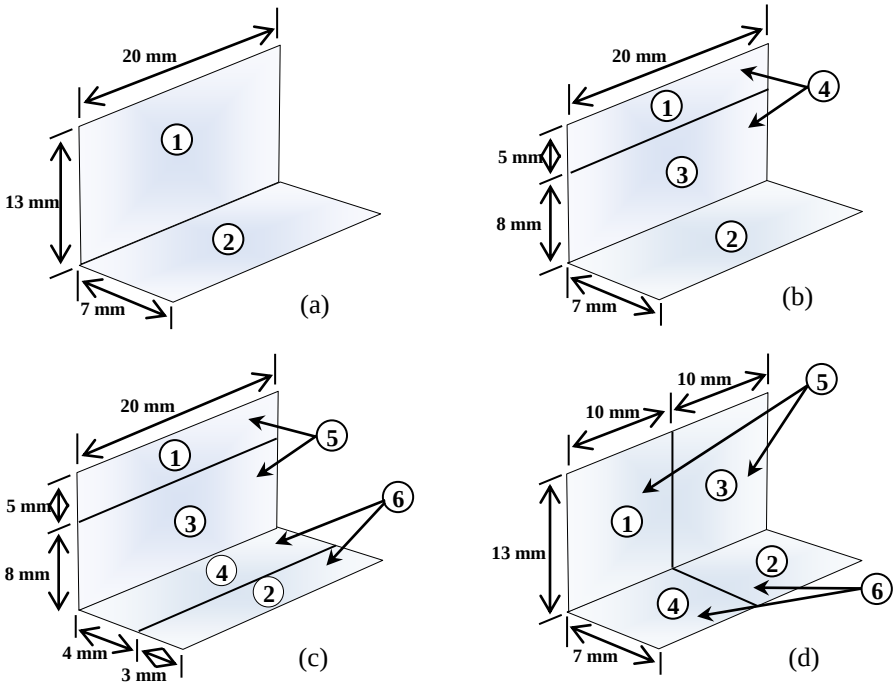
Solution : La règle de sommation donne : $F_{11} + F_{12} + F_{13} + F_{14} = 1$

Ainsi pour une surface plane $F_{11} = 0$

En appliquant la règle de symétrie, le facteur de forme de S_1 avec les trois surfaces est le même, donc : $F_{12} = F_{13} = F_{14} = \frac{1}{3}$



Exercice 09 : Calculer le facteur de forme F_{12} pour les configurations géométriques suivantes :



Solution :

- ***Configuration (a) :*** à partir de la figure 5.27

$$\left.\begin{matrix} L_1 = 7mm, L_2 = 13mm \\ W = 20mm \end{matrix}\right\} \frac{L_2}{W} = \frac{13}{20} = 0.65, \ \& \ \frac{L_1}{W} = \frac{7}{20} = 0.35 \Rightarrow F_{12} = 0.35$$

- ***Configuration (b) :*** supposant que la surface 4 est une combinaison de la surface 1 et de la surface 3 : $S_4 = S_1 + S_3$

La règle de sommation : $F_{24} = F_{21} + F_{23}$ or $F_{21} = F_{24} - F_{23}$

La règle de réciprocité : $S_1F_{12} = S_2F_{21} = S_2(F_{24} - F_{23})$ Or $F_{12} = \frac{S_2}{S_1}(F_{24} - F_{23})$

À partir de la figure 5.27, on peut déterminer F_{23} :

$$\left.\begin{array}{l} L_2 = 8\,mm,\ \ L_1 = 7\,mm \\ W = 20mm \end{array}\right\} \frac{L_2}{W} = \frac{8}{20} = 0.4\ \&\ \frac{L_1}{W} = \frac{7}{20} = 0.35 \Rightarrow F_{23} = 0.3$$

De la même manière pour F_{24} :

$$\left.\begin{array}{l} L_2 = 8+5\,mm,\ \ L_1 = 7\,mm \\ W = 20mm \end{array}\right\} \frac{L_2}{W} = \frac{13}{20} = 0.65\ \&\ \frac{L_1}{W} = \frac{7}{20} = 0.35 \Rightarrow F_{24} = 0.35$$

En définitif : $F_{12} = \frac{7\times10^{-3}\times20\times10^{-3}}{5\times10^{-3}\times20\times10^{-3}} \times (0.35 - 0.3) = 0.07$

Configuration (c) : on suppose que : $S_5 = S_1 + S_3$ et $S_6 = S_2 + S_4$

De la règle de sommation, on peut écrire : $F_{16} = F_{12} + F_{14}$ & $F_{12} = F_{16} - F_{14}$

Appliquant la règle de réciprocité : $\begin{cases} S_1F_{16} = S_6F_{61} \longrightarrow F_{16} = \frac{S_6}{S_1}F_{61} \\ S_1F_{14} = S_4F_{41} \longrightarrow F_{14} = \frac{S_4}{S_1}F_{41} \end{cases}$

On a aussi $\begin{cases} F_{65} = F_{63} + F_{61} \longrightarrow F_{61} = F_{65} - F_{63} \\ F_{45} = F_{41} + F_{43} \longrightarrow F_{41} = F_{45} - F_{43} \end{cases}$

Il vient : $F_{16} = \frac{S_6}{S_1}(F_{65} - F_{63}) = \frac{7\times20}{5\times20}(F_{65} - F_{63}) = 1.4\times(F_{65} - F_{63})$

$$F_{14} = \frac{S_4}{S_1}(F_{45} - F_{43}) = \frac{4\times20}{5\times20}(F_{45} - F_{43}) = 0.8(F_{45} - F_{43})$$

A partir de la figure 5.27, on détermine F_{65}, F_{63}, F_{45}, F_{43} et F_{16} :

- **F_{65}** : $\left.\begin{array}{l} L_2 = 8+5\,mm,\ \ L_1 = 4+3\,mm \\ W = 20mm \end{array}\right\} \frac{L_2}{W} = \frac{13}{20} = 0.65\ \&\ \frac{L_1}{W} = \frac{7}{20} = 0.35 \Rightarrow F_{65} = 0.35$
- **F_{63}** : $\left.\begin{array}{l} L_2 = 8\,mm,\ \ L_1 = 4+3\,mm \\ W = 20mm \end{array}\right\} \frac{L_2}{W} = \frac{8}{20} = 0.4\ \&\ \frac{L_1}{W} = \frac{7}{20} = 0.35 \Rightarrow F_{63} = 0.3$
- **F_{45}** : $\left.\begin{array}{l} L_2 = 8+5\,mm,\ \ L_1 = 4\,mm \\ W = 20mm \end{array}\right\} \frac{L_2}{W} = \frac{13}{20} = 0.65\ \&\ \frac{L_1}{W} = \frac{4}{20} = 0.2 \Rightarrow F_{45} = 0.367$
- **F_{43}** : $\left.\begin{array}{l} L_2 = 8\,mm,\ \ L_1 = 4\,mm \\ W = 20mm \end{array}\right\} \frac{L_2}{W} = \frac{8}{20} = 0.4\ \&\ \frac{L_1}{W} = \frac{4}{20} = 0.2 \Rightarrow F_{43} = 0.358$

D'où : $F_{16} = 1.4\times(0.35 - 3) = 0.07$ et $F_{14} = 0.8(0.367 - 0.358) = 0.0072$

<u>Par conséquent :</u> $F_{12} = 0.07 - 0.0072 = 0.063$

- Configuration (d) : on suppose que : $S_5 = S_1 + S_3$ & $S_6 = S_2 + S_4$

De la règle de sommation, on peut écrire : $F_{16} = F_{12} + F_{14} \longrightarrow F_{12} = F_{16} - F_{14}$

En appliquant la règle de réciprocité : $S_1F_{16} = S_6F_{61}$ on trouve $F_{16} = \frac{S_6}{S_1}F_{61} \Rightarrow F_{12} = \frac{S_6}{S_1}F_{61} - F_{14}$

La sommation nous donne aussi : $F_{65} = F_{61} + F_{63} \longrightarrow F_{61} = F_{65} - F_{63} \Rightarrow F_{12} = \frac{S_6}{S_1}(F_{65} - F_{63}) - F_{14}$

Nous pouvons maintenant utiliser la relation de réciprocité : $S_3F_{36} = S_6F_{63}$ qui donne :

$$F_{63} = \frac{S_3}{S_6}F_{36} \Rightarrow F_{12} = \frac{S_6}{S_1}\left[F_{65} - \frac{S_3}{S_6}F_{36}\right] - F_{14}$$

D'autre part la relation de sommation $F_{36} = F_{32} + F_{34}$ conduit à $F_{12} = \frac{S_6}{S_1}\left[F_{65} - \frac{S_3}{S_6}\left(F_{32} + F_{34}\right)\right] - F_{14}$

Appliquant maintenant la règle de symétrie, soit : $F_{34} = F_{21} = \frac{S_1}{S_2}F_{12}$ et $F_{32} = F_{14}$

Il vient donc : $F_{12} = \frac{S_6}{S_1}\left[F_{65} - \frac{S_3}{S_6}\left(F_{32} + \frac{S_1}{S_2}F_{12}\right)\right] - F_{14}$

Or : $F_{12}\left(1 - \frac{S_3}{S_2}\right) = \frac{S_6}{S_1}F_{65} - \frac{S_3}{S_1}F_{14} - F_{14} = \frac{S_6}{S_1}F_{65} - F_{14}\left(1 + \frac{S_3}{S_1}\right)$

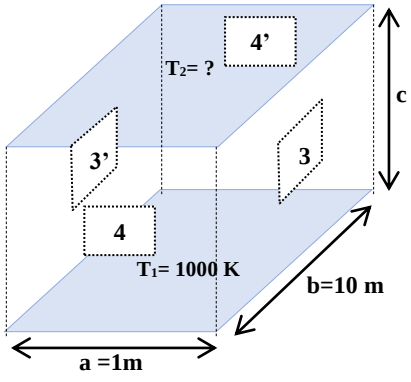
A partir de la figure 5.27, on détermine F_{65}, et F_{14} :

- **F_{65}** : $\left.\begin{matrix} L_2 = 13\,\text{mm},\ L_1 = 7\,\text{mm} \\ W = 10 + 10\,\text{mm} \end{matrix}\right\} \frac{L_2}{W} = \frac{13}{20} = 0.65\ \&\ \frac{L_1}{W} = \frac{7}{20} = 0.35 \Rightarrow F_{65} = 0.35$

- **F_{14}** : $\left.\begin{matrix} L_2 = 13\,\text{mm},\ L_1 = 7\,\text{mm} \\ W = 10\,\text{mm} \end{matrix}\right\} \frac{L_2}{W} = \frac{13}{10} = 1.3\ \&\ \frac{L_1}{W} = \frac{7}{10} = 0.7 \Rightarrow F_{14} = 0.24$

En définitif : $F_{12}\left(1 - \frac{13\times10}{7\times10}\right) = \left(\frac{7\times20}{13\times10}\right)\times0.35 - 0.24\left(1 + \frac{13\times10}{7\times10}\right) \Rightarrow F_{12} = \frac{-0.103}{-0.857} = 0.120$

Exercice 10 : On considère deux murs parallèles de dimensions (a = 1 m, b = 10 m) séparés par une hauteur de 1 m. Les deux murs se comportent comme des corps noirs. Le mur inférieur est maintenu à une température de 1000 K. Le mur supérieur, est maintenu à une température constante grâce à un apport de puissance électrique (chauffage par effet Joule) égal à 12.5 W. Quelle est la température du mur supérieur ? (On notera que le milieu ambiant est à la température de 300 K).



Solution : Il faut tout d'abord remarquer que le milieu environnant peut être simulé par l'ajout de 4 surfaces noires dont la température est égale à la température ambiante T_{amb} = 300K.
On calcul d'abord les facteurs de forme F_{12} et F_{1v} :

- *Surface 1 à la surface 2* : D'après la figure 5.26 donnant le facteur de frome entre deux rectangles parallèles, et avec $\frac{L_2}{D} = \frac{1}{1} = 1$ et $\frac{L_1}{D} = \frac{10}{1} = 10$, on lit la valeur de $F_{12} = 0.4$

Le facteur de forme F_{12} peut également être trouvé en utilisant la relation du tableau 5.7. Pour deux plans parallèles (cas 1), soit :

$$F_{12} = \frac{2}{\pi XY}\left\{\ln\left[\frac{\left(1+X^2\right)\left(1+Y^2\right)}{1+X^2+Y^2}\right]^{1/2} - X\tan^{-1}X - Y\tan^{-1}Y + X\sqrt{1+Y^2}\tan^{-1}\frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} + Y\sqrt{1+X^2}\tan^{-1}\frac{Y}{\sqrt{1+X^2}}\right\}$$

Avec : $X = \frac{a}{c} = \frac{1}{1} = 1$ et $Y = \frac{b}{c} = \frac{10}{1} = 10$

D'où on obtient :

$$F_{12}=\frac{2}{\pi\times 10}\left\{\ln\left(\frac{2\times 101}{102}\right)^{\frac{1}{2}}-\tan^{-1}1-10\tan^{-1}10+\sqrt{101}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{101}}+10\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{10}{\sqrt{2}}\right\}\text{ soit } F_{12}=0.4$$

- *Surface 1 vers les surfaces verticales* (S_3, $S_{3'}$, S_4, et $S_{4'}$) : Appliquant la règle de la sommation : $F_{11}+F_{12}+F_{1v}=1$, l'indice « v » se réfère à toutes les surfaces verticales.

Puisque la surface 1 est plane, $F_{11}=0$ cela donne : $F_{1v}=1-F_{12}=1-0.4=0.6$

On sait que le flux émis par la surface 1 est : $\Phi_1=\Phi_{12}+\Phi_{1v}=S_1F_{12}\sigma\left(T_1^4-T_2^4\right)+S_1F_{1v}\sigma\left(T_1^4-T_{amb}^4\right)$

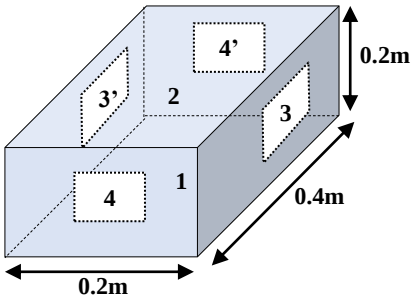
Ou encore $\Phi_1=S_1F_{12}\sigma\left(T_1^4-T_2^4\right)+S_1F_{1v}\sigma\left(T_1^4-T_{amb}^4\right)$

On tire la température T_2 :

$$T_2=\left[\frac{S_1F_{1v}\sigma\left(T_1^4-T_{amb}^4\right)+S_1F_{12}\sigma T_1^4-\Phi_1}{S_1F_{12}\sigma}\right]^{1/4}=\left[\frac{10\times 0.6\times 5.67\times 10^{-8}\left(875^4-298^4\right)+10\times 0.4\times 5.67\times 10^{-8}\times(875)^4-25}{10\times 0.4\times 5.67\times 10^{-8}}\right]^{1/4}$$

$T_2=1098\,K$

Exercice 11 : soit une cavité de forme parallélépipédique (200 mm x 200 x 400 mm) dont les surfaces intérieures sont supposées êtres noires (voir figure ci-contre). La surface inférieure (sol) S_1 est maintenue à une température de 600 K, la surface supérieure S_2 est à 500 K, et toutes les surfaces verticales (S_3, $S_{3'}$, S_4, et $S_{4'}$) sont à 550 K. Calculer le flux net radiatif échangé entre la S_1 et les autres surfaces.



Solution : Calculons d'abord les facteurs de forme :

Surface 1 à la surface 2 : D'après la figure 5.26 donnant le facteur de vue entre deux rectangles parallèles, et avec

$\frac{L_2}{D}=\frac{0.2}{0.2}=1$ et $\frac{L_1}{D}=\frac{0.4}{0.2}=2$, on lit la valeur de $F_{12}=0.28$

Surface 1 vers les surfaces verticales (S_3, $S_{3'}$, S_4, et $S_{4'}$) : Appliquant la règle de la sommation : $F_{11}+F_{12}+F_{1v}=1$, l'indice « v » se réfère à toutes les surfaces verticales.

Puisque la surface 1 est plane, $F_{11}=0$ cela donne : $F_{1v}=1-F_{12}=1-0.28=0.72$

- Les flux échangés sont calculés facilement comme suit :

$$\Phi_{12}=A_1F_{12}\sigma\left(T_1^4-T_2^4\right)==0.2\times 0.4\times 0,28\times 5,67\times 10^{-8}\times\left(600^4-500^4\right)=85.2\,W$$

$$\Phi_{1v}=A_1F_{1v}\sigma\left(T_1^4-T_v^4\right)=0.2\times 0.4\times 0.72\times 5.67\times 10^{-8}\times\left(600^4-550^4\right)=124.4\ W$$

D'où le flux radiatif échangé entre la surface 1 et les autres surfaces est la somme des deux flux : $\Phi_1=\sum_{j=1}^{3}\Phi_{1j}=\Phi_{11}+\Phi_{12}+\Phi_{1v}=0+85.2+124.4=209.6\ W$

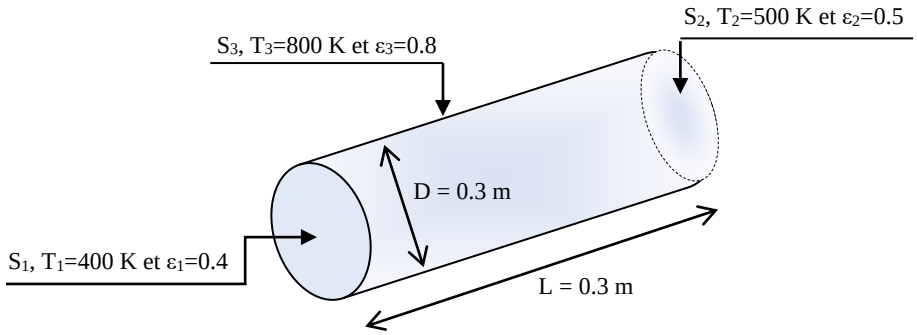
Note : F_{1v} peut également être trouvé en utilisant la figure 5.26 donnant le facteur de forme entre deux rectangles perpendiculaires et joints : $F_{1v}=F_{13}+F_{13'}+F_{14}+F_{14'}$

$\frac{L_2}{D}=\frac{0.2}{0.4}=0.5$, $\frac{L_1}{D}=\frac{0.2}{0.4}=0.5$, alors on lit la valeur de $F_{13}=F_{13'}=0.245$

$\frac{L_2}{D}=\frac{0.2}{0.2}=1$, $\frac{L_1}{D}=\frac{0.4}{0.2}=2$, alors on lit la valeur de $F_{13}=F_{14'}=0.115$

D'où on obtient : $F_{1v} = 2\times(0.245+0.115) = 0.72$

Exercice 12 : On considère un four de forme cylindrique de 0.3 m de diamètre et de 0.3 m de longueur. Les deux extrémités sont considérées comme surfaces grises et diffuses dont les températures et les émissivités sont respectivement à T_1 = 400 K, T_2 = 500 K, ε_1 = 0.4 et ε_2 = 0.5. La surface latérale est également diffuse et grise avec une émissivité de ε_3=0.8 et une température de T_3 = 800 K. Déterminer le flux radiatif net de chacune des surfaces.

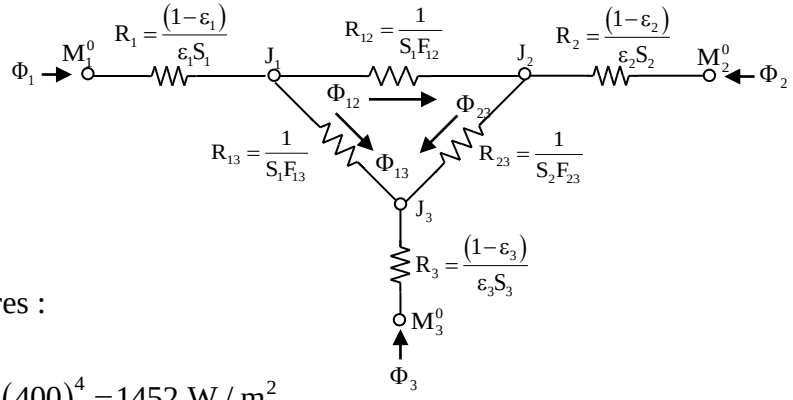


Solution : Pour calculer le flux net de chaque surface, nous devons d'abord déterminer les radiosités. En utilisant la représentation de la figure 5.36 nous obtenons le schéma représentatif ci-contre. En écrivant l'équation 5.62 pour chacune des surface

$$S_1 : \frac{M_1^0 - J_1}{R_1} = \frac{J_1 - J_2}{R_{12}} + \frac{J_1 - J_3}{R_{13}}$$

$$S_2 : \frac{M_2^0 - J_2}{R_2} = \frac{J_2 - J_1}{R_{12}} + \frac{J_2 - J_3}{R_{23}}$$

$$S_3 : \frac{M_3^0 - J_3}{R_3} = \frac{J_3 - J_1}{R_{13}} + \frac{J_3 - J_2}{R_{23}}$$



Évaluant les termes qui seront nécessaires :

- *Les émittances sont :*

$$M_1^0 = \sigma T_1^4 = 5.67\times10^{-8}\times(400)^4 = 1452\ \text{W/m}^2$$

$$M_2^0 = \sigma T_2^4 = 5.67\times10^{-8}\times(500)^4 = 3544\ \text{W/m}^2$$

$$M_3^0 = \sigma T_3^4 = 5.67\times10^{-8}\times(800)^4 = 23224\ \text{W/m}^2$$

- *Les facteurs de frome* F_{12} et F_{13} : r_2/L = 0.5 et L/r_1 = 2 de la figure 5.28 $F_{12} = F_{21}$ = 0.17. La regle de sommation nous donne $F_{11} + F_{12} + F_{13}$ = 1. Pour une surface plane, F_{11} = 0 D'où F_{13} = 1 - F_{12} = 1 par symétrie $F_{13} = F_{23}$

- *Les surfaces :* $S_1 = S_2 = \frac{\pi D^2}{4} = 0.07069\,\text{m}^2$ et $S_3 = \pi DL = 0.2827\,\text{m}^2$

On se retrouve donc avec un système de 3 équations à 3 inconnues J_1, J_2 et J_3 :

$$\begin{cases} -2.500J_1 + 0.2550J_2 + 1.2450J_3 = -1452 \\ -0.1700J_1 - 2.0000J_2 + 0.8300J_3 = -3544 \\ 0.05189J_1 + 0.05189J_2 - 1.1037J_3 = -3544 \end{cases}$$

Après résolution, on trouve : J_1 = 12.877 W/m^2 J_2 = 12.086 W/m^2 et J_3 = 22.216 W/m^2:
Utilisant de l'équation 5.61, le flux radiatif net pour chaque surface est le suivant :

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} S_i F_{ij}\left(J_i - J_j\right)$$

$$S_1 : \Phi_i = S_1F_{11}(J_1 - J_1) + S_1F_{12}(J_1 - J_2) + S_1F_{13}(J_1 - J_3)$$

$$\Phi_1 = 0 + 0.07069 \times 0.17(12,877 - 12,086) + 0.07069 \times 0.83(12,877 - 22,216)$$

$$S_2 : \Phi_2 = S_2F_{21}(J_2 - J_1) + S_2F_{22}(J_2 - J_2) + S_2F_{23}(J_2 - J_3)$$

$$\Phi_2 = 0.07069 \times 0.17(12,086 - 12,877) + 0 + 0.07069 \times 0.83(12,086 - 22,216)$$

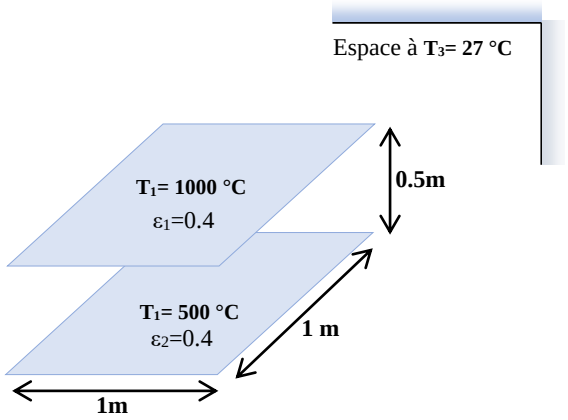
$$S_2 : \Phi_2 = S_3F_{31}(J_3 - J_1) + S_3F_{32}(J_3 - J_2) + S_3F_{33}(J_3 - J_3)$$

$$\Phi_3 = 0.07069 \times 0.83(22,216 - 12,877) + 0.07069 \times 0.83(22,216 - 12,086) + 0$$

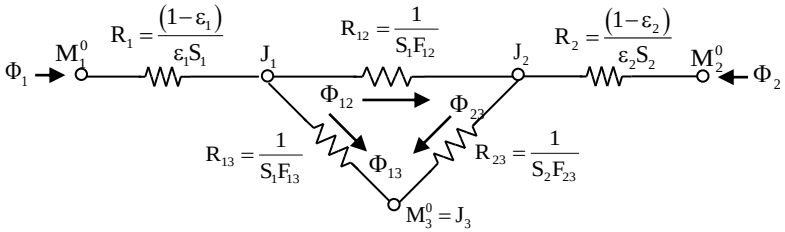
En définitif : $\Phi_1 = -538\,W$, $\Phi_2 = -603\,W$ et $\Phi_3 = 1141\,W$

On peut vérifier facilement que $\Phi_i = 0$. On constate aussi que J_2 est inférieur à J_1 malgré que la température de la surface 2 soit supérieure à celle de la surface 1; que nous pouvons expliquer par le rôle important que joue l'émissivité.

Exercice 13 : Soit deux plaques parallèles de 1m × 1m séparées par une hauteur de 0.5 m. comme le schématise la figure ci-dessous, les plaques sont situées dans une grande pièce, dont ses murs sont maintenus à une température de 27 °C. Déterminer le flux radiatif net de chacune des surfaces.



Solution : Le schéma électrique équivalent est illustré sur la figure ci-dessous :



Comme la surface S_3 est très grande, la résistance $R_3 = 3$ peut être considérée comme négligeable par ailleurs $M_3^0 = J_3$

Puisque la radiosité de la suraface 3 est connue : $J_3 = M_3^0 = \sigma T_3^4 = 459.27\ W/m^{2,}$ alors on écrit le bilan uniquement pour les surface 1 et 2, on a :

$$S_1 \rightarrow \frac{M_1^0 - J_1}{R_1} = \frac{J_1 - J_2}{R_{12}} + \frac{J_1 - J_3}{R_{13}}$$

$$S_2 \rightarrow \frac{M_2^0 - J_2}{R_2} = \frac{J_2 - J_1}{R_{12}} + \frac{J_2 - J_3}{R_{23}}$$

Évaluant les termes qui seront nécessaires :

- *Les facteurs de frome* F_{12} et F_{13} : A partir de la figure 5.26 $F_{12} = 0.43 = F_{21}$ pour $L_2/D = L_1/D = 2$, $F_{13} = 1 - F_{12} = 0.57 = F_{23}$
- *Les différentes résistances au sein du réseau sont :*

$$R_1 = \frac{1-\varepsilon_1}{S_1\varepsilon_1} = \frac{1-0.4}{1\times 0.4} = 1.5, \quad R_2 = \frac{1-\varepsilon_2}{S_2\varepsilon_2} = \frac{1-0.5}{1\times 0.5} = 1.0$$

$$R_{12} = \frac{1}{S_1F_{12}} = \frac{1}{1\times 0.43} = 2.325, \quad R_{13} = R_{23} = \frac{1}{S_1F_{13}} = \frac{1}{S_2F_{23}} = \frac{1}{1\times 0.57} = 1.7544$$

- *Les émittances sont :* $M_1^0 = \sigma T_1^4 = 56700\ \text{W/m}^2$ $M_2^0 = \sigma T_2^4 = 3543.75\ \text{W/m}^2$

On se retrouve alors après remplacement des différents termes nécessaires, avec un système de deux d'équations à deux inconnus J_1, J_2 :

$$-1.666J_1 + 0.43J_2 + 38061.78 = 0$$

$$0.43J_1 + 2.0J_2 + 3804.53 = 0$$

La résolution donne $J_1 = 24699\ \text{W/m}^2$ et $J_2 = 7213\ \text{W/m}^2$

La chaleur nette perdue par la plaque 1, $\Phi_1 = \dfrac{M_1^0 - J_1}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{S_1\varepsilon_1}} = \dfrac{56700 - 24699}{1.5} = 21334\,\text{W}$

Et par la plaque 2, $\Phi_2 = \dfrac{M_2^0 - J_2}{\dfrac{1-\varepsilon_2}{S_2\varepsilon_2}} = \dfrac{3543.75 - 7213}{1.0} = -3669.25\,\text{W}$

La chaleur reçue par la pièce est donc :

$\Phi_3 = \dfrac{J_1 - M_3^0}{\dfrac{1}{S_1F_{13}}} + \dfrac{J_2 - M_3^0}{\dfrac{1}{S_2F_{23}}} = \dfrac{24699 - 459.27}{1.7544} + \dfrac{7213 - 459.27}{1.7544} = 17666\,\text{W}$ qui est égal à $\Phi_1 + \Phi_2$.

La chaleur reçue par la plaque 2 de la plaque 1 est : $\Phi_{12} = \dfrac{J_1 - J_2}{\dfrac{1}{S_1F_{12}}} = \dfrac{24699 - 7213}{2.325} = 7520.86\ \text{W}$

La chaleur rejetée par la plaque 2 vers la pièce : $\Phi_{23} = \dfrac{J_2 - M_3^0}{\dfrac{1}{S_2F_{23}}} = \dfrac{7213 - 459.27}{1.7544} = 3849.6\ \text{W}$

Références Bibliographiques

[1] J. F. Sacadura. Initiation aux transfert thermiques. Technique et documentation, Lavoisier 1993.

[2] J. L. Battaglia, A. Kuzik et J. R. Puiggali, Introduction aux transferts thermiques, Dunod 2010.

[3] Yves JANNOT et Christian Moyne, Cours Transferts thermiques - 2ème année Ecole des Mines Nancy. Edilivre, 2012

[4] Y. A. Cengel and A.J. Ghajar, Heat and Mass Transfer- Fundamentals & Applications. Fifth edition, Mc Graw Hill, 2015.

[5] M. N Özisik. Heat conduction. Second edition. John Wiley & Sons, 1993.

[6] J. Krabol, Transfert de chaleur, Masson, 1990.

[7] F. Kreith, Raj M. Manglik and M. S. Bohn. Principles of Heat Transfer. Seventh edition. Cengage Learning, 2011

[8] Rojer Itterbeek. Cours transferts thermiques. Disponible sur le lien : https://www.itterbeek.org/fr/index/cours-transferts-thermiques, 2020.

[9] C.P. Cothandaraman. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. Revised third edition. New Age International (P) Ltd., Publishers, 2006

[10] Theodore l. Bergman, Adrienne S. Lavine, Frank P. Incropera, David P. Dewitt. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. Seventh edition. New York : John Wiley & Sons, 2011.

[11] N. V. Suryanaraya. Engineering Heat Transfer. St. Paul, Minn.: West, 1995.

[12] M. F. Modest. Radiative Heat Transfer. Third edition, New York: McGraw-Hill, 2013.

[13] C. Balaji, Essentials of Radiation Heat Transfer. Ane Books Pvt. Ltd-Wiley, 2014

[14] J. R. Howell, M. P. Mengüç and R. Siegel. Thermal Radiation Heat Transfer. Sixth edition. CRC Press Taylor & Francis Group, 2016.

[15] Rajendra Karwa. Heat and mass transfer. Springer, 2007.

[16] Mahesh M. Rathore. Engineering heat and mass transfer. Laxmi Publications (P) Ltd. Third edition, 2015.

[17] R.K. Rajput .Heat and Mass Transfer. S Chand & Company Ltd, revised edition, 2011.

[18] Jean Taine, Franck Enguehard et Estelle lacona. Transferts thermiques : introduction aux transferts d'énergie-Cours et exercices d'application. 5eme édition. Dunod, 2014.

[19] Je-Chin Han. Analytical heat transfer. CRC Press Taylor & Francis Group, 2012.

Transformée de Laplace

Soit $f(t)$ une fonction réelle définie $\forall t \geq 0$. La transformée de Laplace de f, $L<f(t)>$ est donnée par l'intégrale suivante :

$$L\langle f(t)\rangle = f(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt} dt$$

f(t)	L<f(t)> = f(p)
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{1}{(n-1)} t^{n-1}$	$\frac{1}{p^n}$
$\frac{1}{(n-1)} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^n}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$
$t^n.e^{at}$ n=1,2,3,….	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
cos(at)	$\frac{p}{p^2+a^2}$
sin(at)	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x}}{p}$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$
$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p^2}$	$\left(t + \frac{a^2}{2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) - a\sqrt{\frac{t}{\pi}} - e^{-\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)^2}$
f'(t)	$pf(p) - f(0)$
f''(t)	$p^2 f(p) - pf(0) - f'(0)$

Tableau 3.1 : Transformation de Laplace

Fonction d'erreur

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt \qquad \operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u)$$

u	erf(u)	u	erf(u)	u	erf(u)	u	erf(u)	u	erf(u)
0.00	0.000 000	0.50	0.520 500	1.00	0.842 701	1.50	0.966 105	2.00	0.995 32
0.01	0.011 283	0.51	0.529 244	1.01	0.846 810	1.51	0.967 277	2.05	0.996 26
0.02	0.022 565	0.52	0.537 899	1.02	0.850 838	1.52	0.968 414	2.10	0.997 02
0.03	0.033 841	0.53	0.546 464	1.03	0.854 784	1.53	0.969 516	2.15	0.997 64
0.04	0.045 111	0.54	0.554 939	1.04	0.858 650	1.54	0.970 586	2.20	0.998 14
0.05	0.056 372	0.55	0.563 323	1.05	0.862 436	1.55	0.971 623	2.25	0.998 54
0.06	0.067 622	0.56	0.571 616	1.06	0.866 144	1.56	0.972 628	2.30	0.998 86
0.07	0.078 858	0.57	0.579 816	1.07	0.869 773	1.57	0.973 603	2.35	0.999 110 7
0.08	0.090 078	0.58	0.587923	1.08	0.873 326	1.58	0.974 547	2.40	0.999 311 5
0.09	0.101 281	0.59	0.595 937	1.09	0.876 803	1.59	0.975 462	2.50	0.999 593 0
0.10	0.112 463	0.60	0.603 856	1.10	0.880 205	1.60	0.976 348	2.60	0.999 764 0
0.11	0.123 623	0.60	0.611 681	1.11	0.883 533	1.61	0.977 207	2.70	0.999 865 7
0.12	0.134 758	0.62	0.619 412	1.12	0.886 788	1.62	0.978 038	2.80	0.999 925 0
0.13	0.145 867	0.63	0.627 047	1.13	0.889 971	1.63	0.978 843	2.90	0.999 958 9
0.14	0.156 947	0.64	0.634 586	1.14	0.893 082	1.64	0.979 622	3.00	0.999 977 9
0.15	0.167 996	0.65	0.642 029	1.15	0.896124	1.65	0.980 376	3.10	0.999 988 4
0.16	0.179 012	0.66	0.649377	1.16	0.899 096	1.66	0.981 105	3.20	0.999 994 0
0.17	0.189 992	0.67	0.656 628	1.17	0.902 000	1.67	0.981 810	3.30	0.999 996 9
0.18	0.200 936	0.68	0.663 782	1.18	0.904 837	1.68	0.982 493	3.40	0.999 998 5
0.19	0.211 840	0.69	0.670 840	1.19	0.907 608	1.69	0.983 153	3.50	0.999 999 256 91
0.20	0.222 702	0.70	0.677 801	1.20	0.910 314	1.70	0.983 790	3.60	0.999 999 644 14
0.21	0.233 522	0.71	0.684 666	1.21	0.912 956	1.71	0.984 407	3.70	0.999 999 832 85
0.22	0.244 296	0.72	0.691 433	1.22	0.915 534	1.72	0.985 003	3.80	0.999 999 923 00
0.23	0.255 022	0.73	0.698 104	1.23	0.918 050	1.73	0.985 578	3.90	0.999 999 965 21
0.24	0.265 700	0.74	0.704 678	1.24	0.920 505	1.74	0.986 135	4.00	0.999 999 984 58
0.25	0.276 326	0.75	0.711 156	1.25	0.922 900	1.75	0.986 672	4.20	0.999 999 997 14
0.26	0.286 900	0.76	0.717 537	1.26	0.925 236	1.76	0.987 190	4.40	0.999 999 999 51
0.27	0.297 418	0.77	0.723 822	1.27	0.927 514	1.77	0.987 691	4.60	0.999 999 999 92
0.28	0.307 880	0.78	0.730 010	1.28	0.929 734	1.78	0.988 174	4.80	0.999 999 999 99
0.29	0.318 283	0.79	0.736 103	1.29	0.931 899	1.79	0.988 641	> 4.80	1.00
0.30	0.328 627	0.80	0.742 101	1.30	0.934 008	1.80	0.989 090		
0.31	0.338 908	0.81	0.748 003	1.31	0.936 063	1.81	0.989 524		
0.32	0.349 126	0.82	0.753 811	1.32	0.938 065	1.82	0.989 943		
0.33	0.359 279	0.83	0.759 524	1.33	0.940 015	1.83	0.990 347		
0.34	0.369 365	0.84	0.765 143	1.34	0.941 914	1.84	0.990 736		
0.35	0.379 382	0.85	0.770 668	1.35	0.943 762	1.85	0.991 111		
0.36	0.389 330	0.86	0.776 100	1.36	0.945 562	1.86	0.991472		
0.37	0.399 206	0.87	0.781 440	1.37	0.947 313	1.87	0.991 821		
0.38	0.409 009	0.88	0.786 687	1.38	0.949 016	1.88	0.992 156		
0.39	0.418 739	0.89	0.791 843	1.39	0.950 673	1.89	0.992 479		
0.40	0.428 392	0.90	0.796 908	1.40	0.952 285	1.90	0.992 790		
0.41	0.437 969	0.91	0.801 883	1.41	0.953 853	1.91	0.993 090		
0.42	0.447 468	0.92	0.806 768	1.42	0.955 376	1.92	0.993 378		
0.43	0.456 887	0.93	0.811 563	1.43	0.956 857	1.93	0.993 656		
0.44	0.466 225	0.94	0.816 271	1.44	0.958 297	1.94	0.993 922		
0.45	0.475 482	0.95	0.820 891	1.45	0.959 695	1.95	0.994 179		
0.46	0.484 656	0.96	0.825 424	1.46	0.961 054	1.96	0.994 426		
0.47	0.493 745	0.97	0.829 870	1.47	0.962 373	1.97	0.994 664		
0.48	0.502 750	0.98	0.834 231	1.48	0.963 654	1.98	0.994 892		
0.49	0.511 668	0.99	0.838 508	1.49	0.964 898	1.99	0.995 111		

Tableau 3.2 : Valeurs de la fonction d'erreur

Propriétés de l'eau à saturation						
T_m [°C]	ρ [kg/m]	C_p [J/kg.°C]	λ [W/m.°C]	$\mu\times10^{-4}$[Pa.s]	$a\times10^{-7}$[m^2/s]	Pr
0	1002	4218	0.552	17.90	1.31	13.06
20	1001	4182	0.597	10.10	1.43	7.02
40	995	4178	0.628	6.55	1.51	4.34
60	985	4184	0.651	4.71	1.55	3.02
80	974	4196	0.668	3.55	1.64	2.22
100	960	4216	0.680	2.82	1.68	1.74
120	945	4250	0.685	2.33	1.71	1.45
140	928	4283	0.684	1.99	1.72	1.24
160	910	4342	0.680	1.73	1.73	1.10
180	889	4417	0.675	1.54	1.72	1.00
200	867	4505	0.665	1.39	1.71	0.94
220	842	4610	0.652	1.26	1.68	0.89
240	816	4756	0.635	1.17	1.64	0.88
260	786	4949	0.611	1.08	1.58	0.87
280	753	5208	0.580	1.02	1.48	0.91
300	714	5728	0.540	0.96	1.32	1.02
Propriétés de l'air à saturation						
T_m [°C]	ρ [kg/m]	C_p [J/kg·°C]	λ [W/m.°C]	$\mu\times10^{-5}$[Pa.s]	$a\times10^{-5}$[m^2/s]	Pr
0	1.292	1006	0.0242	1.72	1.86	0.72
20	1.204	1006	0.0257	1.81	2.12	0.71
40	1.127	1007	0.0272	1.90	2.40	0.70
60	1.059	1008	0.0287	1.99	2.69	0.70
80	0.999	1010	0.0302	2.09	3.00	0.70
100	0.946	1012	0.0318	2.18	3.32	0.69
120	0.898	1014	0.0333	2.27	3.66	0.69
140	0.854	1016	0.0345	2.34	3.98	0.69
160	0.815	1019	0.0359	2.42	4.32	0.69
180	0.779	1022	0.0372	2.50	4.67	0.69
200	0.746	1025	0.0386	2.57	5.05	0.68
220	0.700	1028	0.0399	2.64	5.43	0.68
240	0.688	1032	0.0412	2.72	5.80	0.68
260	0.662	1036	0.0425	2.79	6.20	0.68
280	0.638	1040	0.0437	2.86	6.59	0.68
300	0.616	1045	0.0450	2.93	6.99	0.68

Corrélations valables pour T_m comprise entre 0 et 100 °C

Pour l'eau

$$\rho = -0.00380(T_m)^2 - 0.0505(T_m) + 1002.6 \text{ kg/m}^3$$

$$C_p = 4180 \text{ J/kg°C}$$

$$\lambda = -9.87\times10^{-6}(T_m)^2 + 2.238\times10^{-3}\times(T_m) + 0.5536 \text{ W/m°C}$$

$$\mu = 10^{-4}\times\frac{17.9 - 0.07377(T_m) + 0.0003354(T_m)^2}{1 + 0.03032(T_m) + 8.765\times10^{-5}\times(T_m)^2} \text{ Pa s}$$

$$\text{Pr} = \frac{13.06 + 1.387(T_m) - 0.0037(T_m)^2}{1 + 0.12407(T_m) + 0.005297(T_m)^2}$$

Pour l'air

$$\rho = \frac{353}{T_m + 273} \text{ kg/m}^3$$

$$C_p = 1008 \text{ J/kg.°C}$$

$$\lambda = 7.57\times10^{-5}(T_m) + 0.0242 \text{ W/m.°C}$$

$$\mu = 10^{-5}\times(0.0046\times T_m + 1.7176) \text{ Pa.s}$$

$$\text{Pr} = -2.54\times10^{-4}(T_m) + 0.7147$$

$$\beta = \frac{1}{T_m + 273} \text{ K}^{-1}$$

Tableau 4.1 : Caractéristiques thermophysiques de l'eau et de l'air

$\lambda T(\mu m)K$	$F_{0-\lambda T}$	$\lambda T(\mu m)K$	$F_{0-\lambda T}$
500	0.13×10^{-7}	5000	0.63371
600	0.112×10^{-6}	5200	0.65792
700	0.22×10^{-5}	5400	0.68031
800	0.184×10^{-4}	5600	0.701
900	0.912×10^{-4}	5800	0.72009
1000	0.321×10^{-3}	6000	0.73777
1100	0.926×10^{-3}	6200	0.75408
1200	0.00216	6400	0.76917
1300	0.00436	6600	0.78315
1400	0.00783	6800	0.79607
1500	0.01285	7000	0.80806
1600	0.01977	7500	0.83435
1700	0.0286	8000	0.85624
1800	0.03941	8500	0.87455
1900	0.05215	9000	0.88997
2000	0.06672	9500	0.90303
2200	0.10093	10 000	0.91414
2400	0.14027	11 000	0.93183
2600	0.18312	12 000	0.94504
2800	0.22788	13 000	0.95508
3000	0.27322	14 000	0.96284
3200	0.31807	15 000	0.96892
3400	0.3617	16 000	0.97375
3600	0.40357	18 000	0.9808
3800	0.44334	20 000	0.98554
4000	0.48085	30 000	0.99528
4200	0.51596	40 000	0.99791
4400	0.54875	50 000	0.99889
4600	0.57923	. .	1.00000
4800	0.60751		

Tableau 5.4 : Valeurs de la fonction $F_{o-\lambda T}$